

CURS 12

GRINZI CU ZĂBRELE

CUPRINS

12. Grinzi cu zăbrele	1
Cuprins.....	1
Introducere modul.....	1
Obiective modul.....	2
12.1. Introducere	2
12.2. Ipoteze simplificatoare	3
12.3. Notății și denumiri	5
Test de autoevaluare 1	7
12.4. Condiția de determinare statică	7
12.5. Metoda izolării nodurilor	9
Test de autoevaluare 2	10
12.6. Noduri încărcate particular	10
12.7. Metoda secțiunilor	11
Test de autoevaluare 3	12
Bibliografie modul.....	12
Rezumat modul.....	13
Rezolvarea testelor de autoevaluare	13

12. Grinzi cu zăbrele



**Introducere
modul**

În acest modul se vor calcula grinzi cu zăbrele, unele dintre cele mai utilizate sisteme de corpuri static determinate.

Se vor prezenta tipuri de grinzi cu zăbrele plane, se vor introduce noțiunile specifice acestor sisteme de corpuri și se vor arăta două metode pentru determinarea eforturilor din barele grinzilor cu zăbrele: metoda izolării nodurilor și metoda secțiunilor.



Obiective modul

După parcurgerea acestui modul cursantul va ști:

- să definească o grindă cu zăbrele;
- să identifice o grindă cu zăbrele static determinată;
- să determine eforturile în barele unei grinzi cu zăbrele plane, simple utilizând metoda izolării nodurilor;
- să determine eforturile în barele unei grinzi cu zăbrele plane, simple utilizând metoda secțiunilor.



Durata medie de studiu individual

2 ore

Acest interval de timp presupune asimilarea noțiunilor prezentate în acest modul și realizarea testelor de autoevaluare.

12.1. Introducere

Grinzile cu zăbrele sunt sisteme de corpuri de tip bară dreaptă, articulate între ele și care au ca legături exterioare numai reazeme simple și articulate.

Clasificarea grinzilor cu zăbrele:

a) După numărul necunoscutelor introduse de legăturile grinzilor cu zăbrele:

- grinzi cu zăbrele static determinate – numărul necunoscutelor introduse de legături este egal cu numărul ecuațiilor de echilibru scalare independente posibile de scris;
- grinzi cu zăbrele static nedeterminate – numărul necunoscutelor introduse de legături este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru scalare independente posibile de scris.

b) După configurație:

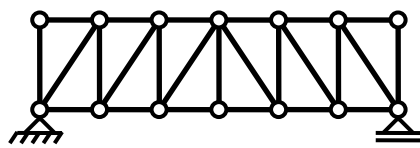
- grinzi cu zăbrele spațiale;
- grinzi cu zăbrele plane – grinzile cu zăbrele la care barele grinzii, articulațiile intermediare, legăturile exterioare și încărcările sunt în același plan.

c) După modul de alcătuire:

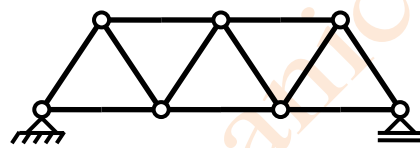
- grinzi cu zăbrele simple – se obțin prin alăturare de triunghiuri;
- grinzi cu zăbrele compuse – se obțin prin suprapunerea grinzilor cu zăbrele simple;
- grinzi cu zăbrele complexe – se obțin atât prin suprapunerea unor grinzi cu zăbrele simple cât și prin alăturare de triunghiuri.

În acest modul se vor studia grinzile cu zăbrele static determinate, plane și simple.

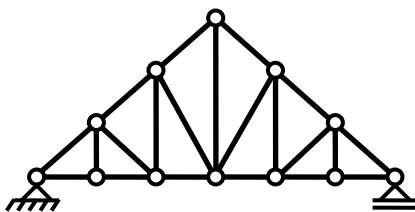
În continuare se prezintă asemenea grinzi cu zăbrele având forme variate (figura 12.1).



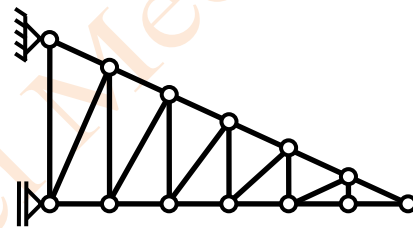
Grindă cu zăbrele dreptunghiulară



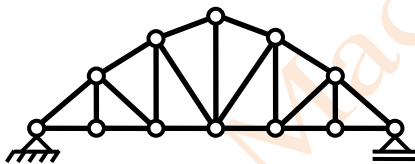
Grindă cu zăbrele cu tălpi paralele



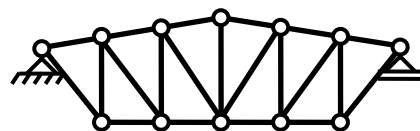
Grindă cu zăbrele triunghiulară



Grindă cu zăbrele triunghiulară



Grindă cu zăbrele poligonală



Grindă cu zăbrele lenticulară

Fig. 12.1. Forme ale grinzilor cu zăbrele plane, simple

12.2. Ipoteze simplificatoare

Ipotezele simplificatoare sunt acceptate pentru a reduce volumul de calcul necesar pentru calculul grinzilor cu zăbrele. Deși rezultatele obținute sunt aproximative, acestea sunt satisfăcătoare.

Ipotezele simplificatoare pentru grinzile cu zăbrele sunt:

1) Barele grinzii cu zăbrele sunt drepte și au secțiunile transversale de dimensiuni neglijabile în raport cu lungimile lor, astfel încât barele pot fi reprezentate prin axele lor.

Această ipoteză este respectată din condiții constructive.

2) Axele barele se intersectează în puncte denumite noduri, iar nodurile grinzii cu zăbrele sunt considerate articulații.

3) Încărcările unei grinzi cu zăbrele sunt numai forțe concentrate ce acționează în noduri. De asemenea, legăturile exterioare ale unei grinzi cu zăbrele se aplică tot în noduri.

Această ipoteză se realizează constructiv, prin prevederea unor elemente care să transmită încărcările nodurilor unei grinzi cu zăbrele (de exemplu, pentru o grindă cu zăbrele de acoperiș prin intermediul elementelor numite pane – figura 12.2). Sunt încărcări (cum este greutatea proprie a barelor unei grinzi cu zăbrele) care se transmit în realitate ca încărcări distribuite. Dacă aceste încărcări nu se neglijează, atunci ele pot fi considerate ca forțe concentrate ce acționează în nodurile ce mărginesc barele respective.

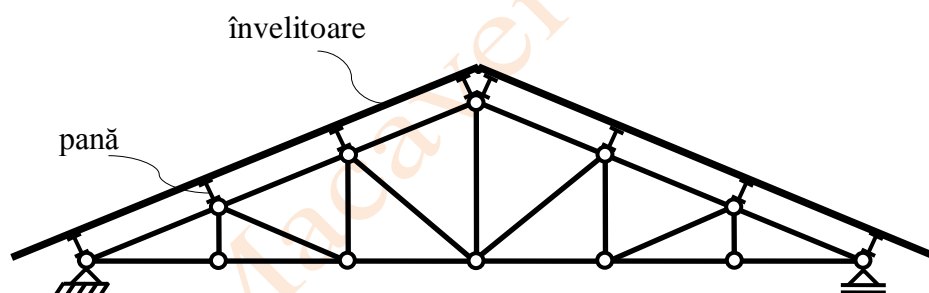


Fig. 12.2. Grindă cu zăbrele de acoperiș

Fie o bară a unei grinzi cu zăbrele, de lungime l_{ij} , mărginită de nodurile „ i ” și „ j ” (figura 12.3). Conform ipotezelor simplificatoare, toate forțele (active și de legătură) vor fi aplicate în noduri, adică la extremitățile barei considerate, formând astfel două sisteme de forțe concurente. Aceste sisteme de forțe concurente sunt echivalente cu rezultantele lor, acționând tot în extremitățile barei. Aceste rezultante se descompun pe direcția barei (componentele N_i , respectiv N_j) și pe direcție perpendiculară pe axa barei (componentele T_i , respectiv T_j).

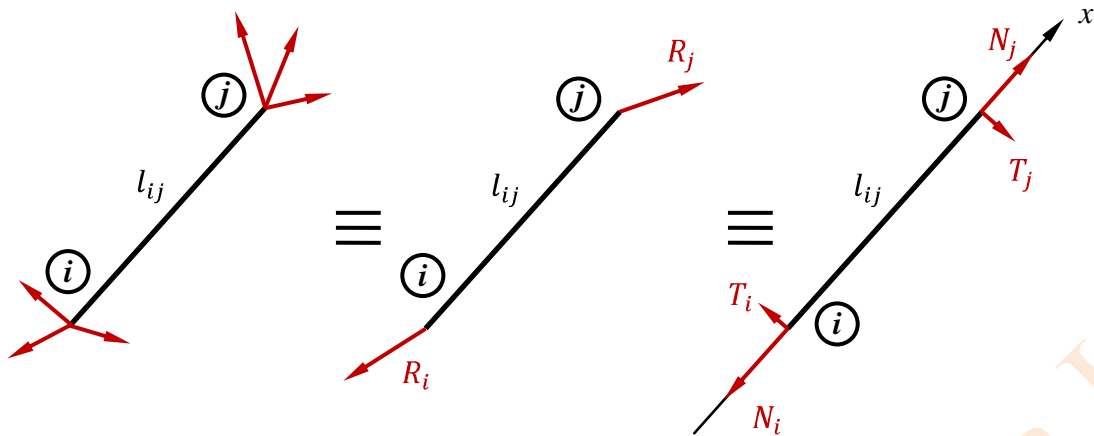


Fig. 12.3.

Condițiile de echilibru ale barei considerate sunt:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0: N_j - N_i = 0 \Rightarrow N_j = N_i = N_{ij} \\ \sum M_i = 0: T_j \cdot l_{ij} = 0 \Rightarrow T_j = 0 \\ \sum M_j = 0: T_i \cdot l_{ij} = 0 \Rightarrow T_i = 0 \end{cases}$$

Din aceste condiții rezultă că într-o bară a unei grinzi cu zăbrele se dezvoltă doar forțe axiale (forțe ce se dezvoltă pe direcția axei barei) care sunt constante pe lungimea elementului. De aceea, rezultă că bara considerată este solicitată de o singură forță axială, notată N_{ij} , necunoscută ca mărime și sens.

Se observă că o bară a unei grinzi cu zăbrele are următoarele proprietăți: este o bară dreaptă, articulată la capete și neîncărcată, deci poate fi considerată pendul (legătură intermediară simplă). Astfel, o grindă cu zăbrele poate fi privită ca un sistem de puncte materiale (nodurile) legate între ele prin legături intermediare simple (barele).

12.3. Notații și denumiri

Barele care alcătuiesc o grindă cu zăbrele au diferite denumiri, după poziția lor în cadrul grinzii, astfel:

- talpă superioară – bara se găsește între două noduri aflate la partea superioară a grinzii cu zăbrele;
- talpă inferioară – bara se găsește între două noduri aflate la partea inferioară a grinzii cu zăbrele;
- diagonală – bara înclinată ce leagă două noduri așezate pe tălpi opuse;

- montant – bara verticală ce leagă două noduri așezate pe tălpi opuse.

Distanța dintre legăturile exterioare ale grinzii cu zăbrele se numește deschidere.

Spațiul dintre două rânduri de noduri se numește panou.

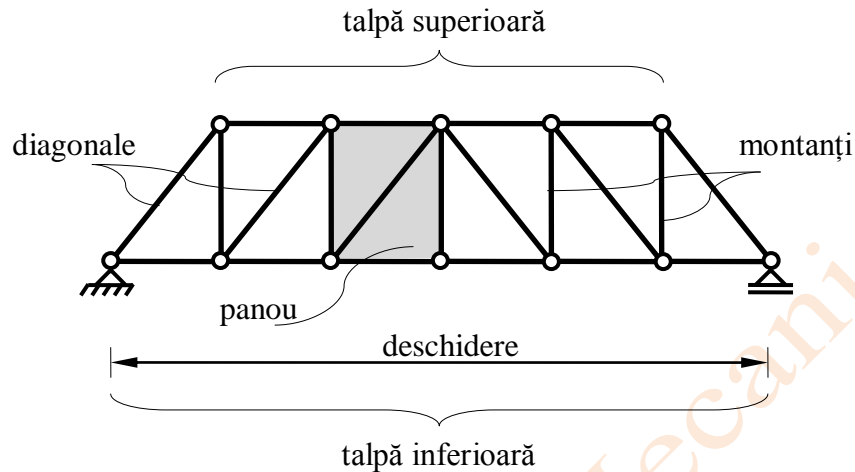


Fig. 12.4. Denumirile barelor unei grinzi cu zăbrele

Pentru forțele axiale se acceptă următoarea convenție de semn: dacă bara este întinsă, semnul forței axiale este plus (efort axial pozitiv), iar pentru o bară comprimată semnul forței axiale este minus (efort axial negativ).

Fie bara mărginită de nodurile „ i ” și „ j ” (figura 12.5). Se observă că dacă bara este întinsă, efortul axial iese din nod, iar dacă bara este comprimată efortul axial intră în nod.

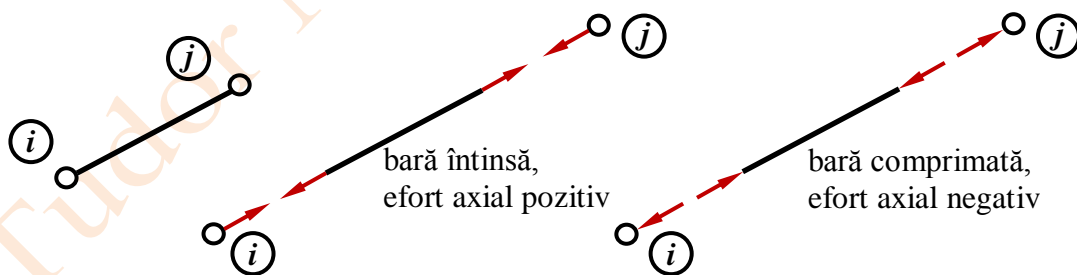


Fig. 12.5. Convenția de semn pentru efortul axial



**Test de
autoevaluare 1**

1. Definiți grinda cu zăbrele plană.
2. Enunțul „Axele barele se intersectează în puncte denumite noduri, iar nodurile grinzii cu zăbrele sunt considerate articulații perfecte” este o ipoteză simplificatoare pentru grinzile cu zăbrele:
 - a) adevărat;
 - b) fals.
3. O bară verticală ce leagă două noduri așezate pe tălpi opuse se numește:
 - a) talpă superioară;
 - b) montant;
 - c) diagonală.

Sugestiile de rezolvare și răspunsurile corecte sunt indicate la finalul modulului.

12.4. Condiția de determinare statică

În continuare se consideră grinda cu zăbrele ca fiind un sistem de puncte materiale (nodurile) legate între ele prin legături intermediare simple (barele) și cu mediul exterior prin trei legături simple (un reazem simplu și un reazem articulat).

Pentru ca un sistem de corpuri să fie static determinat trebuie să îndeplinească două condiții, una cantitativă (numărul ecuațiilor de echilibru scalare, independente, posibil de scris să fie egal cu numărul necunoscutelor scalare introduse de legături) și una calitativă (sistemul de corpuri să fie imobilizat).

Condiția cantitativă

Având în vedere că în plan un punct are două grade de libertate (deci pentru un punct se pot scrie două ecuații de echilibru scalare independente), atunci pentru o grindă cu zăbrele cu „ n ” noduri (privită ca un sistem de „ n ” puncte materiale) se pot scrie $2n$ ecuații. Astfel, numărul ecuațiilor de echilibru va fi:

$$E = 2 \cdot n$$

Numărul necunoscutelor introduse de legături va fi egal cu numărul barelor, notat cu „b” (fiecare bară este o legătură intermediară simplă și introduce în calcul o singură necunoscută scalară) la care se adaugă numărul necunoscutelor din legăturile exterioare. Cum grinda cu zăbrele este legată de mediul exterior prin trei legături simple, numărul necunoscutelor din legăturile exterioare este 3. Astfel, numărul necunoscutelor este:

$$N = b + 3$$

Condiția de determinare statică pentru grinzi cu zăbrele este:

$$2 \cdot n = b + 3$$

Aspectul calitativ

Grinda cu zăbrele simplă este legată de mediul exterior prin trei legături simple. Rezultă că pentru a fi static determinată, o grindă cu zăbrele trebuie să se comporte ca un solid rigid (să fie invariabilă din punct de vedere geometric).

Invariabilitatea unei grinzi cu zăbrele se poate realiza în felul următor (figura 12.6):

Se consideră o bară având la extremități două noduri. Se consideră al treilea nod, care se leagă de primele două prin două bare, realizându-se astfel cea mai simplă formă invariabilă geometric, triunghiul. Orice alt nod poate fi legat de restul structurii prin intermediul a două bare (cu condiția ca acele două bare să nu fie în prelungire). Rezultă că dacă o grindă cu zăbrele este alcătuită din alăturare de triunghiuri, atunci rezultă o structură invariabilă geometric.

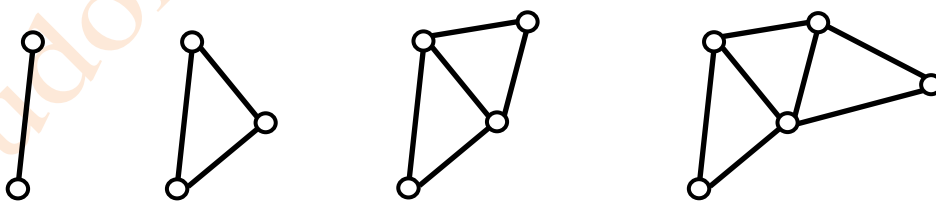


Fig. 12.6. Realizarea unei grinzi cu zăbrele invariabilă geometric

12.5. Metoda izolării nodurilor

Metoda izolării nodurilor este o metodă utilizată în problema dimensionării unei grinzi cu zăbrele, problemă în care trebuie determinate eforturile în toate barele acesteia. Pentru rezolvarea unei grinzi cu zăbrele se determină întâi reacțiunile din legăturile exterioare prin scrierea a trei ecuații de echilibru scalare independente pe ansamblu (considerând grinda cu zăbrele ca un singur corp) după care se izolează pe rând nodurile astfel încât din echilibrul fiecărui nod să rezulte două ecuații cu două necunoscute.

Etapele acestei metode sunt:

- 1) Se verifică dacă grinda cu zăbrele este static determinată;
- 2) Se calculează cosinuşii directori ai barelor înclinate și se numerotează nodurile;
- 3) Se determină reacțiunile din legăturile exterioare prin scrierea a trei ecuații de echilibru scalare independente pe ansamblu, ca și când grinda cu zăbrele ar fi un singur corp; rezultatele se trec pe o schemă a rezultatelor;
- 4) Se identifică un nod cu două bare de efort necunoscut; acesta se izolează și se încarcă cu forțele exterioare (cunoscute) și cu eforturile (necunoscute) corespunzătoare celor două bare; inițial, sensul acestor eforturi necunoscute se alege de întindere (eforturile ies de nod) astfel încât să se respecte convenția de semn („+” pentru întindere, „-” pentru compresiune);
- 5) Se scriu două ecuații de echilibru scalare:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{cases}$$
- 6) Se rezolvă sistemul de ecuații, iar rezultatele se trec pe schema rezultatelor; eforturile se reprezintă pe schema rezultatelor în raport cu nodurile grinzii cu zăbrele (efortul de întindere iese din noduri, efortul de compresiune intră în noduri);
- 7) Se caută alt nod cu două bare de efort necunoscut, se izolează și se încarcă cu forțele exterioare (cunoscute) și cu eforturile (două necunoscute, alese inițial a fi de întindere, iar celelalte cunoscute) din barele suprimate;
- 8) Se reiau etapele 5, 6 și 7 până când se epuizează toate nodurile;
- 9) Ultimele două noduri ale grinzii cu zăbrele oferă trei ecuații de verificare.



Test de autoevaluare 2

1. Condiția de determinare statică pentru grinzi cu zăbrele este:

- a) $n = b + 3$
- b) $2 \cdot n = b + 3$
- c) $2 \cdot n = b - 3$

2. Enunțul „o grindă cu zăbrele alcătuită prin alăturare de triunghiuri este o structură invariabilă geometrică” este:

- a) adevărat;
- b) fals.

3. În ce problemă se poate utiliza eficient metoda izolării nodurilor?

Sugestiile de rezolvare și răspunsurile corecte sunt indicate la finalul modulului.

12.6. Noduri încărcate particular

În anumite situații de încărcare se poate determina efortul dintr-o bară a unei grinzi cu zăbrele fără a mai efectua calculul propriu-zis. Aceste situații sunt:

- nod cu două bare, neîncărcat (figura 12.7.a) – ambele bare sunt de efort nul (efortul din bare este zero);
- nod cu două bare, încărcat pe direcția uneia dintre ele (figura 12.7.b) – în bara coliniară cu forța efortul este egal în mărime cu forța și produce același efect asupra nodului iar în cealaltă bară efortul este zero;
- nod cu trei bare neîncărcat, două bare fiind în prelungire (figura 12.7.c) – în barele aflate în prelungire eforturile au aceeași mărime, cu același efect asupra nodului iar în cea de-a treia efortul este zero;
- nod cu două bare, încărcat pe direcția barelor (figura 12.7.d) – eforturile din bare sunt egale în mărime cu cele două forțe, cu același efect asupra nodului;
- nod cu trei bare, două bare în prelungire și încărcat pe direcția celei de-a treia (figura 12.7.e) – în barele aflate în prelungire eforturile sunt egale, cu același efect asupra nodului iar în cea de-a treia bară efortul este egal cu forța activă, cu același efect asupra nodului;

- nod cu patru bare neîncărcat, două câte două bare în prelungire (figura 12.7.f) – două câte două eforturile sunt egale, cu același efect asupra nodului;

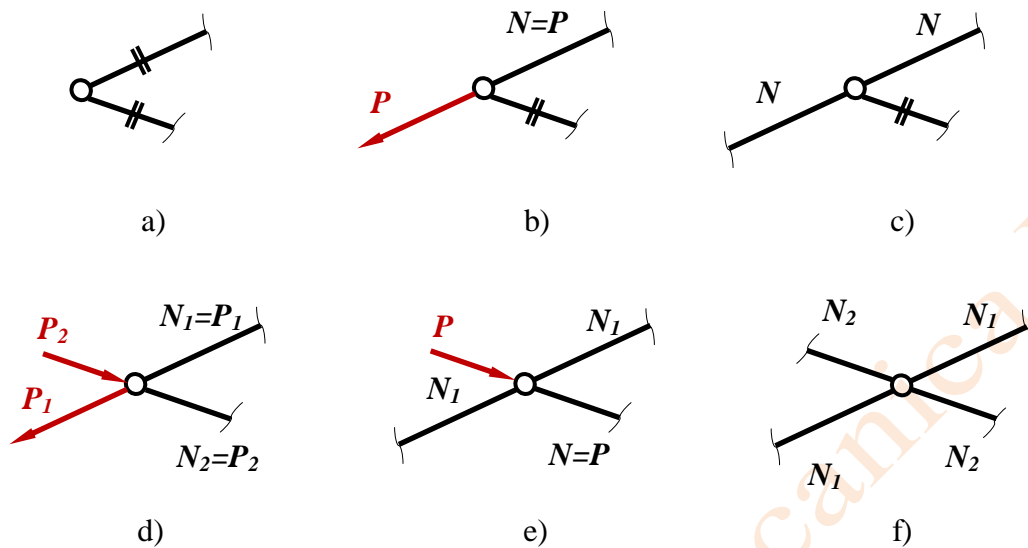


Fig. 12.7. Noduri încărcate particular

Barele de efort nul se pot considera inexistente în calculul stării de eforturi a unei grinzi cu zăbrele.

12.7. Metoda secțiunilor

Metoda secțiunilor permite rezolvarea anumitor bare ale unei grinzi cu zăbrele, de aceea se aplică eficient mai ales în problema de verificare a grinzilor cu zăbrele. Ca și la metoda izolării nodurilor, întâi se determină reacțiunile din legăturile exterioare prin scrierea a trei ecuații de echilibru independente pe ansamblu, după care se determină eforturile dorite prin secțiuni complete ale grinzii cu zăbrele.

Etapele acestei metode sunt:

- 1) Se verifică dacă grinda cu zăbrele este static determinată;
- 2) Se calculează cosinuzii directori ai barelor înclinate și se numerotează nodurile;
- 3) Se determină reacțiunile din legăturile exterioare prin scrierea a trei ecuații de echilibru scalare independente pe ansamblu, ca și când grinda cu zăbrele ar fi un singur corp;

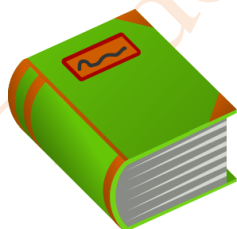
- 4) Se secționează complet grinda cu zăbrele (astfel încât să rezulte două părți distincte); secțiunea se va face prin maxim trei bare de efort necunoscut, iar direcțiile acestor bare nu trebuie să fie toate trei paralele sau toate trei concurente în același punct;
- 5) Se alege una dintre cele două părți și se încarcă cu forțele exterioare (cunoscute) și cu eforturile (cunoscute și necunoscute) din barele suprimate; eforturile necunoscute se aleg inițial a fi de întindere;
- 6) Se exprimă echilibrul părții alese prin scrierea a trei ecuații de echilibru scalare independente; aceste ecuații se scriu astfel încât sistemul de ecuații rezultat să fie un sistem de ecuații decuplat (necunoscutele să se rezolve independent una în raport cu celelalte);
- 7) Se rezolvă ecuațiile de echilibru;
- 8) Se verifică rezultatele printr-o ecuație de echilibru neutilizată.



Test de autoevaluare 3

1. În ce situații o bară a unei grinzi cu zăbrele este de efort nul?
2. Enunțul „Barele de efort nul se pot considera inexistente în calculul stării de eforturi a unei grinzi cu zăbrele” este:
 - a) adevărat;
 - b) fals.
3. În ce problemă se poate utiliza eficient metoda secțiunilor?

Sugestiile de rezolvare și răspunsurile corecte sunt indicate la finalul modulului.



Bibliografie modul

- [1]. Hangan, S., Slătineanu, I., „Mecanică”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983, pag. 112-120;
- [2]. Szolga, V., Szolga, A. M., „Mecanica Teoretică. Note de curs și îndrumător de seminar. Partea I”, Editura Conspress, București, 2003, pag. 162-181;
- [3]. Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R., „Mecanica Teoretică”, Editura Tehnică, București, 1963, pag. 200-211.



Rezumat modul

În acest modul s-a abordat calculul grinziilor cu zăbrele, structuri static determinate foarte utilizate.

Pe lângă introducerea notațiilor și denumirilor specifice s-au prezentat două metode de rezolvare a eforturilor din barele unei grinzi cu zăbrele: metoda izolării nodurilor și metoda secțiunilor.



Rezolvare

test de autoevaluare

1

1. Consultare aspecte teoretice pag. 2;

2. a;

3. b.



Rezolvare

test de autoevaluare

2

1. b;

2. a;

3. Consultare aspecte teoretice pag. 9.



Rezolvare

test de autoevaluare

3

1. Consultare aspecte teoretice pag. 10;

2. a;

3. Consultare aspecte teoretice pag. 11.