SEMINAR 1

NOȚIUNI DE CALCUL VECTORIAL

CUPRINS

1. Noțiuni de calcul vectorial

Introducere seminar

În acest seminar se vor recapitula elementele calculului vectorial. După definirea şi clasificarea mărimilor vectoriale, vor fi trecute în revistă, sintetic, operațiile cu vectori.

Obiective seminar

După parcurgerea acestui seminar cursantul va şti:

- să definească o mărime vectorială;
- să adune doi vectori;
- să efectueze produsul scalar şi vectorial a doi vectori;
- să efectueze produsul mixt şi dublu a doi vectori.

Durata medie de studiu individual

2 ore

Acest interval de timp presupune asimilarea noțiunilor prezentate în acest modul şi realizarea aplicațiilor.

1.1. Aspecte teoretice

1.1.1. Definiții

Mărimea scalară este marimea definită complet prin valoare numerică.

Mărimea vectorială este o mărime cu caracter geometric, definită prin mărime, punct de aplicație, direcție şi sens. Din punct de vedere geometric, un vector este un segment de dreaptă orientat (fig. 1.1)

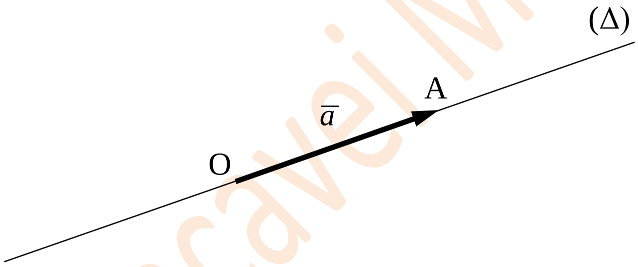

Fig 1.1. Vectorul $\bar{a}$

În figura 1.1. este reprezentat vectorul $\bar{a}$. Dreapta (Δ) se numeşte dreapta suport (suportul) vectorului $\bar{a}$. Punctul O se numeşte punctul de aplicație (originea) vectorului $\bar{a}$ iar punctul A se numeşte vârful vectorului $\bar{a}$. Mărimea vectorului $\bar{a}$ se va nota cu a.

Un vector poate fi:

- liber – punctul de aplicație al vectorului poate ocupa orice poziție în spațiu, fără ca rezultatele problemei studiate să se modifice; cu alte cuvinte, în problema studiată nu interesează poziția punctului de aplicație al vectorului;
- alunecător – punctul de aplicație al vectorului poate ocupa orice poziție pe dreapta suport a acestuia, fără ca rezultatele problemei studiate să se modifice;
- legat – punctul de aplicație ocupă o poziție bine definită în spațiu; orice modificare a acestei poziții conduce la modificarea rezultatelor problemei studiate.

În raport cu un sistem de referință cartezian, expresia analitică a unui vector este:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \, ,$$

unde a_x, a_y, a_z sunt proiecțiile vectorului $\bar{a}$ pe axele unui sistem de referință cartezian având versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi $\bar{k}$. Se face precizarea că un versor este un vector având mărimea egală cu 1.

1.1.2. Adunarea vectorilor

Fie doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ concurenți. Expresiile analitice ale acestor vectori sunt:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \qquad \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$$

Rezultatul adunării este tot un vector

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$$

cu proprietatea că

$$c_x = a_x + b_x \qquad c_y = a_y + b_y \qquad c_z = a_z + b_z$$

Proprietăți:

- comutativitate: $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$;
- asociativitate: $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$;
- element neutru: $\bar{a} + 0 = 0 + \bar{a} = \bar{a}$;
- element invers: $\bar{a} + (-\bar{a}) = 0$.

O altă modalitate de adunare a doi vectori concurenți este aplicarea regulii paralelogramului. Această modalitate va fi prezentată într-un modul ulterior.

1.1.3. Multiplicarea unui vector cu un scalar

Înmulțirea unui vector $\bar{a}$ cu un scalar λ are ca rezultat un vector $\bar{b}$, cu proprietatea:

$$b_x = \lambda a_x \qquad b_y = \lambda a_y \qquad b_z = \lambda a_z$$

Vectorul $\bar{b}$ are aceeaşi orientare cu vectorul $\bar{a}$ dacă λ este pozitiv. Cei doi vectori au sensuri opuse dacă λ este negativ.

Proprietăți:

- comutativitate: $\lambda \bar{a} = \bar{a} \lambda$;
- asociativitate: $\lambda(\eta \bar{a}) = (\lambda \eta)\bar{a} = \eta(\lambda \bar{a})$;

- distributivitate în raport cu adunarea vectorilor: $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$;
- distributivitate în raport cu adunarea: $(\lambda+\eta)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\eta\bar{a}$.

1.2.4. Produs scalar

Fie doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ concurenți. Expresiile analitice ale acestor vectori sunt:

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k} \qquad \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$$

Produsul scalar al celor doi vectori $\bar{a}\cdot\bar{b}$ are ca rezultat un scalar:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\lambda=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

sau

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=ab\cos\angle(\bar{a},\bar{b})$$

Se observă că pentru $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ diferiți de zero, produsul lor scalar este egal cu zero dacă cei doi vectori sunt perpendiculari. Rezultă condiția de perpendicularitate a doi vectori nenuli:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=0, \quad \bar{a},\bar{b}\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{a}\perp\bar{b}$$

Proprietăți:

- comutativitate: $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$;
- distributivitate în raport cu adunarea vectorilor: $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}$;
- $\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2=a^2$.

1.2.5. Produs vectorial

Fie doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ concurenți. Expresiile analitice ale acestor vectori sunt:

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k} \qquad \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$$

Produsul vectorial al celor doi vectori $\bar{a}\times\bar{b}$ este un vector, $\bar{c}$, ale cărui proiecții sunt date de expresiile:

$$c_x=a_yb_z-a_zb_y \qquad c_y=a_zb_x-a_xb_z \qquad c_z=a_xb_y-a_yb_x$$

Din expresiile proiecțiilor vectorului $\bar{c}$ se observă că acesta poate fi exprimat sub forma:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Vectorul $\bar{c}$ este un vector perpendicular pe planul format de vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, orientat astfel încât triedrul $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ să fie un triedru drept (dacă sistemul de referință utilizat este un sistem drept de referință).

Mărimea vectorului $\bar{c}$ mai poate fi determinată în felul următor:

$$c = ab \sin \angle(\bar{a}, \bar{b})$$

Se observă că pentru $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ diferiți de zero, produsul lor vectorial este egal cu zero dacă cei doi vectori au aceeaşi direcție (sunt paraleli sau coliniari):

$$\bar{a} \times \bar{b} = 0, \quad \bar{a}, \bar{b} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{a}, \bar{b} \ \textit{paraleli sau coliniari}$$

Valoarea absolută a produsul vectorial a doi vectori reprezintă aria paralelogramului având ca laturi cei doi vectori.

Proprietăți:

- anticomutativitate: $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$;
- distributivitate în raport adunarea vectorilor: $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$.

1.1.6. Produs mixt

Fie trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ coliniari. Expresia $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$ se numeşte produsul mixt al vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$. Rezultatul este un scalar, obținut din dezvoltarea următorului determinant:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Valoarea absolută a produsului mixt este egală cu volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori.

Proprietăți:

- condiția necesară şi suficientă ca trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ să fie coplanari este ca produsul lor mixt să fie nul;
- $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$;
- determinatul lui Gramm: $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})^2=\begin{vmatrix}\bar{a}\bar{a} & \bar{a}\bar{b} & \bar{a}\bar{c}\\ \bar{b}\bar{a} & \bar{b}\bar{b} & \bar{b}\bar{c}\\ \bar{c}\bar{a} & \bar{c}\bar{b} & \bar{c}\bar{c}\end{vmatrix}$

1.2.7. Produs dublu vectorial

Fie trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ coliniari. Expresia $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ se numeşte produsul dublu al vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$. Rezultatul este un vector, obținut cu formula produsului dublu:

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{d}=\bar{b}(\bar{a}\bar{c})-\bar{c}(\bar{a}\bar{b})$$

Proprietăți:

- vectorul $\bar{d}$ este un vector situat în planul format de vectorii $\bar{b}$ şi $\bar{c}$;
- $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})+\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{a})+\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})=0$.

1.2. Aplicații

Aplicația rezolvată 1

Fie vectorii $\bar{a}=3\bar{i}+5\bar{j}-6\bar{k}$ şi $\bar{b}=6\bar{i}-2\bar{j}+4\bar{k}$. Să se determine expresia analitică a vectorului $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$.

Rezolvare:

Proiecțiile vectorului $\bar{c}$ pe axele sistemului de referință se calculează astfel:

$$c_x=a_x+b_x=3+6=9$$
$$c_y=a_y+b_y=5+(-2)=3$$
$$c_z=a_z+b_z=(-6)+4=2$$

Expresia analitică a vectorului $\bar{c}$ este:

$$\bar{c}=c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}=9\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}$$

Aplicația rezolvată 2

Se cunosc vectorii $\bar{a} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 5\bar{k}$ şi $\bar{b} = 4\bar{i} - 7\bar{j} + 4\bar{k}$. Sunt cei doi vectori perpendiculari?

Rezolvare:

Condiția de perpendicularitate a doi vectori este ca produsul scalar al celor doi vectori să fie zero.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-7) + 5 \cdot 4 = 0$$

Rezultă că vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt perpendiculari.

Aplicația rezolvată 3

Se cunosc vectorii $\bar{a} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + 6\bar{k}$ şi $\bar{b} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$. Să se determine expresia analitică a vectorului $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ şi să se arate că vectorul $\bar{c}$ este perpendicular pe planul format de vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

Rezolvare:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= [5 \cdot 2 - 6 \cdot (-3)]\bar{i} + [-(2 \cdot 2 - 6 \cdot 1)]\bar{j} + [2 \cdot (-3) - 5 \cdot 1]\bar{k} =$$

$$= 28\bar{i} + 2\bar{j} - 11\bar{k}$$

Dacă vectorul $\bar{c}$ este perpendicular pe planul format de vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, atunci el trebuie să fie perpendicular pe fiecare vector în parte:

$$\bar{c} \cdot \bar{a} = 28 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + (-11) \cdot 6 = 0$$

$$\bar{c} \cdot \bar{b} = 28 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + (-11) \cdot 2 = 0$$

Aplicația rezolvată 4

Să se arate că vectorii $\bar{a} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 6\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ şi $\bar{c} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 5\bar{k}$ sunt coplanari.

Rezolvare:

Condiția ca trei vectori să fie coplanari este ca produsul lor mixt să fie egal cu zero:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Fie vectorii $\bar{a} = 4\bar{i} + 9\bar{j} + 3\bar{k}$ şi $\bar{b} = -7\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}$. Să se determine expresia analitică a vectorului $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.

Răspuns: $\bar{c} = -3\bar{i} + 5\bar{j} + 5\bar{k}$

Exercițiul 1

Se cunosc vectorii $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$ şi $\bar{b} = 6\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$. Sunt cei doi vectori perpendiculari?

Răspuns: Da

Exercițiul 2

Se cunosc vectorii $\bar{a} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 6\bar{k}$ şi $\bar{b} = -6\bar{i} + 3\bar{j} - 9\bar{k}$. Sunt cei doi vectori paraleli?

Răspuns: Da

Exercițiul 3

[1]. Vâlcovici, V., Bălan, Şt., Voinea, R., „Mecanica Teoretică”, Editura Tehnică, Bucureşti, 1963, pag. 28-41.

Bibliografie modul