SEMINAR 2

SISTEME DE FORȚE CONCURENTE

CUPRINS

2. Sisteme de forțe concurente

Introducere seminar

În acest seminar se va determina rezultanta unui sistem de forțe concurente utilizând teorema proiecțiilor. Se vor considera două sisteme de forțe concurente, unul în plan şi celălalt în spațiu.

Obiective seminar

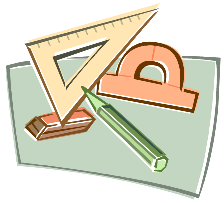
După parcurgerea acestui seminar cursantul va şti:

- să descompună o forță pe direcțiile unor axe date;
- să determine proiecția unei forțe pe o axă;
- să determine rezultanta unui sistem de forțe concurente utilizând teorema proiecțiilor.

Durata medie de studiu individual

2 ore

Acest interval de timp presupune asimilarea noțiunilor prezentate în acest seminar şi realizarea aplicațiilor.



Noțiuni necesare

Noțiunile necesare studiului acestui seminar sunt:

- forța (modul 2, pag. 3);
- proiecția unei forțe pe o axă (modul 2, pag. 4);
- componenta unei forțe pe direcția unei axe (modul 2, pag. 4);
- expresia forței în sistemul de referință cartezian (modul 2, pag. 8,9);
- rezultanta sistemului de forțe concurente (modul 2, pag. 10);
- teorema proiecțiilor (modul 2, pag. 10).

2.1. Aspecte teoretice

Fie un sistem de forțe concurente $\overline{F}_i$.

Într-un sistem de referință cartezian, expresia analitică a forței $\overline{F}_i$ este:

$$\overline{F}_i = X_i \cdot \overline{\imath} + Y_i \cdot \overline{\jmath} + Z_i \cdot \overline{k}$$

unde X_i, Y_i și Z_i sunt proiecțiile forței $\overline{F}_i$ pe axele sistemului de referință.

Expresia analitică a rezultantei unui sistem de forțe concurente se poate determina prin aplicarea teoremei proiecțiilor: proiecția pe o axă a rezultantei unui sistem de forțe concurente este egală cu suma proiecțiilor pe aceeași axă a tuturor forțelor din sistem.

Astfel, dacă notăm proiecțiile rezultantei pe axele sistemului de referință se notează cu X, Y respectiv Z, putem scrie:

$$\overline{R} = X \cdot \overline{\imath} + Y \cdot \overline{\jmath} + Z \cdot \overline{k}$$

unde, conform teoremei proiecțiilor:

$$X = \sum X_i \ ; \ \ Y = \sum Y_i \ ; \ \ Z = \sum Z_i$$

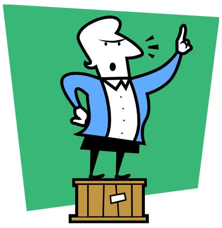
Mărimea rezultantei va fi:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

iar direcția acesteia va fi dată de cosinușii directori:

$$\cos\alpha = \frac{X}{R}, \qquad \cos\beta = \frac{Y}{R}, \qquad \cos\gamma = \frac{Z}{R}$$

2.2. Aplicații rezolvate



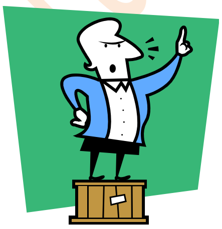
Enunț general

Determinați și reprezentați rezultanta sistemului de forțe concurente din figură.

Etape de rezolvare

Etapele de rezolvare sunt:

- se alege un sistem de referință drept, cu originea în punctul de concurență al sistemului de forțe concurente;
- se descompun toate forțele din sistemul de forțe pe axele sistemului de referință;
- se determină mărimile tuturor acestor componente;
- se adună mărimile componentelor forțelor respectând următoarea regulă de semn: mărimea unei componente are semnul „+” dacă acea componentă are același sens cu axa corespunzătoare și semnul „-” dacă axa și componenta au sensuri opuse; astfel se obțin proiecțiile rezultantei pe axele sistemului de coordonate;
- se scrie expresia analitică a rezultantei;
- se determină mărimea rezultantei;
- se determină direcția rezultantei (cosinușii directori ai acesteia);
- se reprezintă rezultanta sistemului de forțe în raport cu sistemul de referință ales.



Enunț

APLICAȚIA 1

Fie sistemul de forțe concurente acționând în plan (figura 2.1.a). Cunoscând mărimile forțelor $F_1 = 5F$, $F_2 = 8F$, $F_3 = 4F$, să se determine și să se reprezinte rezultanta acestui sistem de forțe.

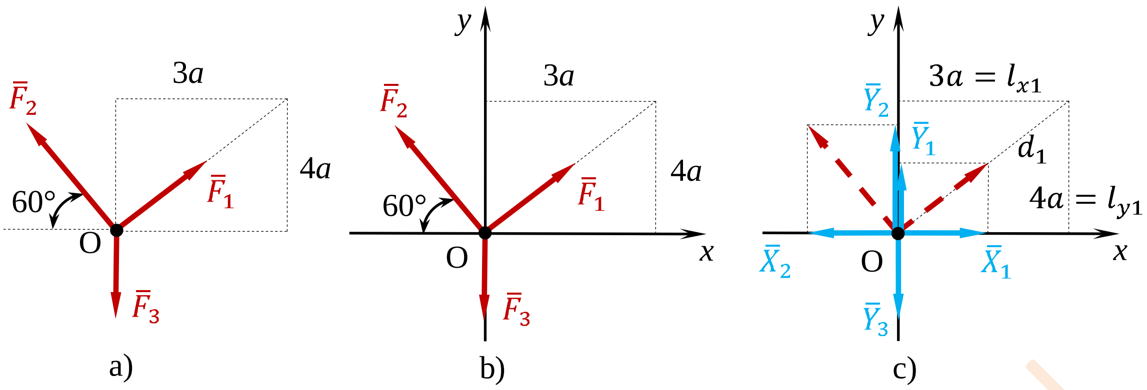


Fig. 2.1

Rezolvare:

În figura 2.1. este reprezentat un sistem de forțe concurente în plan. Direcția forței $\bar{F}_1$ este dată de diagonala dreptunghiului de laturi $3a$, respectiv $4a$ (unde a este unitate de lungime, exprimată în metri). Direcția forței $\bar{F}_2$ este indicată prin unghiul făcut de această forță cu orizontala, iar forța $\bar{F}_3$ are direcție verticală. Mărimile forțelor sunt date în funcție de unitatea de forță F (exprimată în Newtoni).

Etape de rezolvare:

1) Alegerea sistemului de referință.

S-a ales sistemul de referință cartezian drept xOy, cu originea în punctul de concurență al forțelor (figura 2.1.b).

2) Descompunerea forțelor pe axele sistemului de referință.

În figura 2.1.c se pun în evidență componentele forțelor pe axele sistemului de referință. Se observă că forța $\bar{F}_3$, paralelă cu o axă de coordonate, nu are componentă decât pe acea axă.

3) Determinarea mărimilor componentelor forțelor pe axele sistemului de referință.

Pentru forța $\bar{F}_1$, mărimile componentelor se vor determina exprimând cosinuşii directori ai direcției forței. Pentru calculul acestora se va determina mărimea diagonalei dreptunghiului de laturi $3a$ şi $4a$, notată cu d_1:

$$d_1 = \sqrt{l_{x1}^2 + l_{y1}^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$$

unde cu l_{x1} s-a notat lungimea laturii dreptunghiului paralelă cu axa Ox iar cu l_{y1} lungimea laturii paralele cu axa Oy (figura 2.1.c).

Cosinuşii directori ai forței $\bar{F}_1$ se determină astfel:

$$\cos\alpha = \frac{l_{x1}}{d_1} \quad , cos\,\beta = \frac{l_{y1}}{d_1}$$

Mărimile componentelor forței $\bar{F}_1$ pe axele de coordonate sunt:

$$X_1 = F_1 \cdot \frac{l_{x1}}{d_1} = 5F \cdot \frac{3a}{5a} = 3F$$

$$Y_1 = F_1 \cdot \frac{l_{y1}}{d_1} = 5F \cdot \frac{4a}{5a} = 4F$$

Pentru forța $\bar{F}_2$ mărimile componentelor sunt:

$$X_2 = F_2 \cdot \cos 60° = 8F \cdot \frac{1}{2} = 4F$$

$$Y_2 = F_2 \cdot \sin 60° = 8F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6{,}93F$$

Pentru forța $\bar{F}_3$:

$$X_3 = 0$$

$$Y_3 = F_3 = 4F$$

4) Determinarea proiecțiilor rezultantei pe axele sistemului de referință.

Deoarece s-au determinat mărimile componentelor forțelor pe axele de coordonate (care sunt identice cu valorile absolute ale proiecțiilor forțelor pe axele de coordonate), pentru aplicarea teoremei proiecțiilor trebuie stabilită o regulă de semn.

Regula de semn utilizată este: proiecția unei forțe pe o axă are semnul „+” dacă axa şi componenta forței pe axă au acelaşi sens şi semnul „-” dacă axa şi componenta forței pe axă au sensuri opuse.

Proiecțiile rezultantei pe axele de coordonate sunt:

$$X = \sum X_i = X_1 - X_2 + 0 = 3F - 4F + 0 = -F$$

$$Y = \sum Y_i = Y_1 + Y_2 - Y_3 = 4F + 6{,}93F - 4F = 6{,}93F$$

5) Scrierea expresiei analitice a rezultantei:

$$\bar{R} = X \cdot \bar{\imath} + Y \cdot \bar{\jmath} = -F \cdot \bar{\imath} + 6{,}93F \cdot \bar{\jmath}$$

6) Determinarea mărimii rezultantei:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(-F)^2 + (6{,}93F)^2} = 7F$$

7) Determinarea cosinuşilor directori ai rezultantei:

$$\cos\alpha = \frac{X}{R} = \frac{-F}{7F} = -0{,}143$$

$$cos\,\beta = \frac{Y}{R} = \frac{6{,}93F}{7F} = 0{,}990$$

8) Reprezentarea rezultantei (figura 2.2):

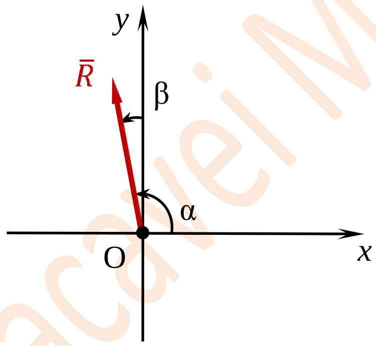
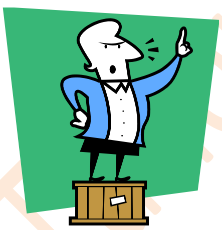


Fig. 2.2



Enunț

APLICAȚIA 2

Fie sistemul de forțe concurente acționând în spațiu (figura 2.3.a). Cunoscând mărimile forțelor $F_1 = 10\sqrt{2}F$, $F_2 = 8F$, $F_3 = 7F$, să se determine şi să se reprezinte rezultanta acestui sistem de forțe.

Obs. Pozițiile forțelor se indică în raport cu sistemul de referință cartezian drept O*xyz*.

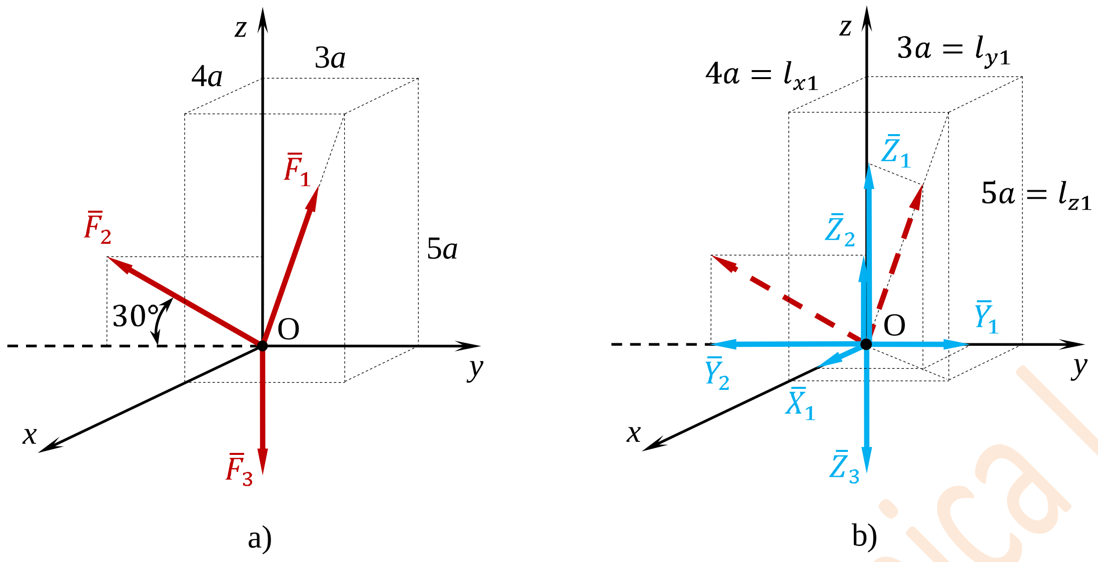


Fig. 2.3

Rezolvare:

În figura 2.3.a este reprezentat un sistem de forțe concurente în spațiu. După cum se observă, cele trei forțe sunt în situații diferite: forța $\bar{F}_1$ are direcția oarecare (direcția diagonalei paralelipipedului de laturi 4*a*, 3*a* respectiv 5*a*), forța $\bar{F}_2$ se află într-un plan al sistemului de referință (*y*Oz) iar direcția acesteia se indică prin unghiul făcut cu o axă de direcție cunoscută (axa O*y* în acest caz) și forța $\bar{F}_3$, coliniară cu o axă a sistemului de referință (axa Oz).

Etape de rezolvare:

1) Alegerea sistemului de referință.

Sistemul de referință este impus prin enunțul aplicației.

2) Descompunerea forțelor pe axele sistemului de referință.

În figura 2.3.b se evidențiază componentele forțelor pe axele sistemului de referință. Forța $\bar{F}_1$ are componente pe toate cele axe de coordonate (are direcție oarecare), forța $\bar{F}_2$ are componente doar pe axele Oy și Oz (acționează în planul *y*Oz) iar forța $\bar{F}_3$ are componentă doar pe axa Oz (este coliniară cu această axă).

3) Determinarea mărimilor componentelor forțelor pe axele sistemului de referință.

Pentru forța $\bar{F}_1$, mărimile componentelor se vor determina exprimând cosinuşii directori ai direcției forței. Pentru calculul acestora se va determina mărimea diagonalei paralelipipedului de laturi $4a$, $3a$ şi $5a$, notată cu d_1:

$$d_1 = \sqrt{l_{x1}^2 + l_{y1}^2 + l_{z1}^2} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2 + (5a)^2} = 5\sqrt{2}a$$

unde cu l_{x1} s-a notat lungimea laturii dreptunghiului paralelă cu axa Ox, cu l_{y1} lungimea laturii paralele cu axa Oy şi cu l_{z1} lungimea laturii paralele cu axa Oz (figura 2.3.b).

Cosinuşii directori ai forței $\bar{F}_1$ se determină astfel:

$$\cos\alpha = \frac{l_{x1}}{d_1} \quad, \cos\beta = \frac{l_{y1}}{d_1} \quad, \cos\gamma = \frac{l_{z1}}{d_1}$$

Mărimile componentelor forței $\bar{F}_1$ pe axele de coordonate sunt:

$$X_1 = F_1 \cdot \frac{l_{x1}}{d_1} = 10\sqrt{2}F \cdot \frac{4a}{5\sqrt{2}a} = 8F$$

$$Y_1 = F_1 \cdot \frac{l_{y1}}{d_1} = 10\sqrt{2}F \cdot \frac{3a}{5\sqrt{2}a} = 6F$$

$$Z_1 = F_1 \cdot \frac{l_{z1}}{d_1} = 10\sqrt{2}F \cdot \frac{5a}{5\sqrt{2}a} = 10F$$

Pentru forța $\bar{F}_2$ mărimile componentelor sunt:

$$X_2 = 0$$

$$Y_2 = F_2 \cdot \cos 30° = 8F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6{,}93F$$

$$Z_2 = F_2 \cdot \sin 30° = 8F \cdot \frac{1}{2} = 4F$$

Pentru forța $\bar{F}_3$:

$$X_3 = 0$$

$$Y_3 = 0$$

$$Z_3 = F_3 = 7F$$

4) Determinarea proiecțiilor rezultantei pe axele sistemului de referință.

$$X = \sum X_i = X_1 + 0 + 0 = 8F + 0 + 0 = 8F$$
$$Y = \sum Y_i = Y_1 - Y_2 + 0 = 6F - 6{,}93F + 0 = -0{,}93F$$
$$Z = \sum Z_i = Z_1 + Z_2 - Z_3 = 10F + 4F - 7F = 7F$$

5) Scrierea expresiei analitice a rezultantei:

$$\bar{R} = X \cdot \bar{\imath} + Y \cdot \bar{\jmath} + Z \cdot \bar{k}$$
$$\bar{R} = 8F \cdot \bar{\imath} - 0{,}93F \cdot \bar{\jmath} + 7F \cdot \bar{k}$$

6) Determinarea mărimii rezultantei:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(8F)^2 + (-0{,}93F)^2 + (7F)^2} = 10{,}67F$$

7) Determinarea cosinuşilor directori ai rezultantei:

$$\cos\alpha = \frac{X}{R} = \frac{8F}{10{,}67F} = 0{,}750$$
$$cos\,\beta = \frac{Y}{R} = \frac{-0{,}93F}{10{,}67F} = -0{,}087$$
$$cos\,\gamma = \frac{Z}{R} = \frac{7F}{10{,}67F} = 0{,}656$$

8) Reprezentarea rezultantei (figura 2.4):

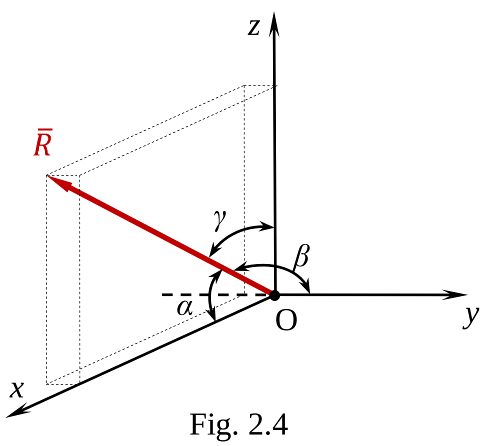


Fig. 2.4

Prezentarea rezultatelor şi modul de evaluare

Cursantul trebuie să prezinte următoarele note de calcul şi rezultate:

- figură cu descompunerea sistemului de forțe – 1p;
- relațiile de determinare ale mărimilor componentelor forțelor şi mărimile rezultate din calcul – 2p;
- scrierea relațiilor rezultate din aplicarea teoremei proiecțiilor şi determinarea proiecțiilor rezultantei pe axele de coordonate – 3p;
- determinarea mărimii rezultantei – 1p;
- determinarea direcției rezultantei (cosinuşii directori) – 1p;
- reprezentarea rezultantei – 1p.

La cele 9 puncte se adaugă 1 punct din oficiu.

Cursantul îndeplineşte obiectivele acestui seminar dacă obține în urma evaluării 5 puncte.

Cursantul care obține rezultate eronate într-o etapă nu mai cumulează puncte din etapele ulterioare.