SEMINAR 3

MOMENTUL FORȚEI ÎN RAPORT CU UN PUNCT

CUPRINS

3. Momentul forței în raport cu un punct

Introducere seminar

În acest seminar se va determina momentul rezultant al unui sistem de forțe oarecare în raport cu originea unui sistem de referință cartezian. Cum la schimbarea punctului în raport cu care se calculează momentul rezultant se poate alege alt sistem de referință cu originea în acel punct, practic se va arăta modul de calcul al momentului rezultant al unui sistem de forțe în raport cu un punct oarecare.

Se vor rezolva două aplicații, una cu un sistem de forțe paralele cu axele sistemului de referință şi una cu un sistem de forțe oarecare.

Obiective seminar

După parcurgerea acestui seminar cursantul va şti:

- să determine momentul unei forțe în raport cu axele unui sistem de referință;
- să determine momentul rezultant al sistemului de forțe în raport cu originea unui sistem de referință;
- să reprezinte momentul rezultant al sistemului de forțe în raport cu originea unui sistem de referință.

Durata medie de studiu individual

2 ore

Acest interval de timp presupune asimilarea noțiunilor prezentate în acest seminar şi realizarea aplicațiilor.

Noțiuni necesare

Noțiunile necesare studiului acestui seminar sunt:

- componenta unei forțe pe direcția unei axe (modul 2, pag. 4);
- momentul forței în raport cu un punct (modul 3, pag. 2-4);
- momentul forței în raport cu originea sistemului de referință cartezian (modul 3, pag. 5,6);
- momentul forței în raport cu o axă (modul 3, pag. 6-8).

3.1. Aspecte teoretice

Se numeşte moment al unei forțe în raport cu un punct O produsul vectorial dintre vectorul ce uneşte punctul O cu punctul de aplicație al forței şi forță (figura 3.1).

$$\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{F}$$

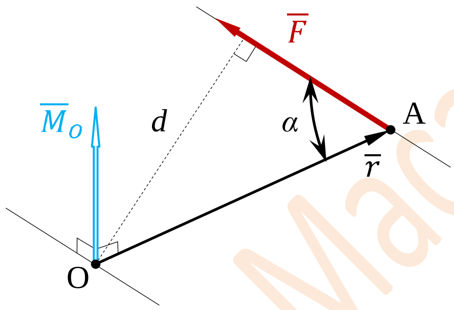


Fig. 3.1. Momentul forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O

Mărimea este:

$$M_O = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot (r \cdot \sin\alpha) = F \cdot d$$

unde d este distanța de la punctul O la dreapta suport a forței şi se numeşte brațul forței. Se observă că momentul forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O este zero atunci când brațul forței d este zero, adică atunci când dreapta suport a forței $\overline{F}$ trece prin punctul O.

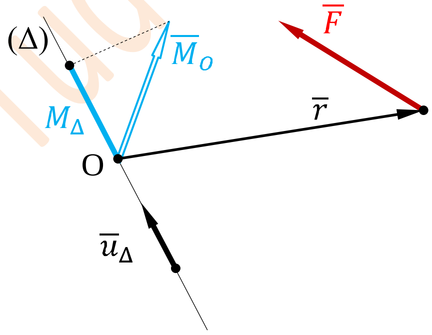


Fig. 3.2. Momentul forței $\overline{F}$ în raport cu axa (Δ)

Momentul forței $\overline{F}$ în raport cu o axă (Δ) este, prin definiție (figura 3.2), proiecția pe axa (Δ) a momentului forței $\overline{F}$ calculat în raport cu un punct oarecare de pe axa (Δ).

$$M_\Delta = \overline{M}_O \cdot \overline{u}_\Delta = (\overline{r} \times \overline{F}) \cdot \overline{u}_\Delta \,,$$

unde $\overline{u}_\Delta$ este versorul axei (Δ).

Fie un sistem de forțe oarecare $\overline{F}_i$.

Expresia momentului forței $\overline{F}_i$ în raport cu originea unui sistem de referință cartezian O*xyz* este:

$$\overline{M}_{Oi} = M_{xi} \cdot \overline{i} + M_{yi} \cdot \overline{j} + M_{zi} \cdot \overline{k}$$

unde M_{xi}, M_{yi} şi M_{zi} sunt momentele forței $\overline{F}_i$ în raport cu axele O*x*, O*y*, respectiv Oz.

Momentul rezultant al sistemului de forțe oarecare în raport cu punctul O este suma vectorială a momentelor forțelor din sistem în raport cu punctul O:

$$\overline{M}_O = \sum \overline{M}_{Oi} = M_x \cdot \overline{i} + M_y \cdot \overline{j} + M_z \cdot \overline{k}$$

unde M_x, M_y şi M_z sunt momentele rezultante ale sistemului de forțe în raport cu axele O*x*, O*y*, respectiv Oz:

$$M_x = \sum M_{xi} \quad , M_y = \sum M_{yi} \quad , M_z = \sum M_{zi}$$

Mărimea momentului rezultant în raport cu punctul O va fi:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

iar direcţia acestuia va fi dată de cosinuşii directori:

$$\cos\alpha = \frac{M_x}{M_O}\,, \qquad \cos\beta = \frac{M_y}{M_O}\,, \qquad \cos\gamma = \frac{M_z}{M_O}$$

Din cele de mai sus rezultă că pentru a determina momentul rezultant al unui sistem de forțe în raport cu originea unui sistem de referință cartezian trebuie să se determine momentele forțelor în raport cu axele de coordonate.

Momentul unei forțe în raport cu o axă prezintă două caracteristici extrem de importante:

- momentul forței $\overline{F}$ în raport cu o axă este zero dacă dreapta suport a forței este paralelă cu axa sau intersectează axa respectivă;
- mărimea momentului forței $\overline{F}$ față de o axă este egală cu mărimea momentului componentei forței dintr-un plan normal pe axă, calculat în raport cu punctul în care axa intersectează planul (figura 3.3):

$$M_\Delta = \pm\left|\overline{M}_O(\overline{F}_P)\right| = \pm\left|\overline{r} \times \overline{F}_P\right|$$

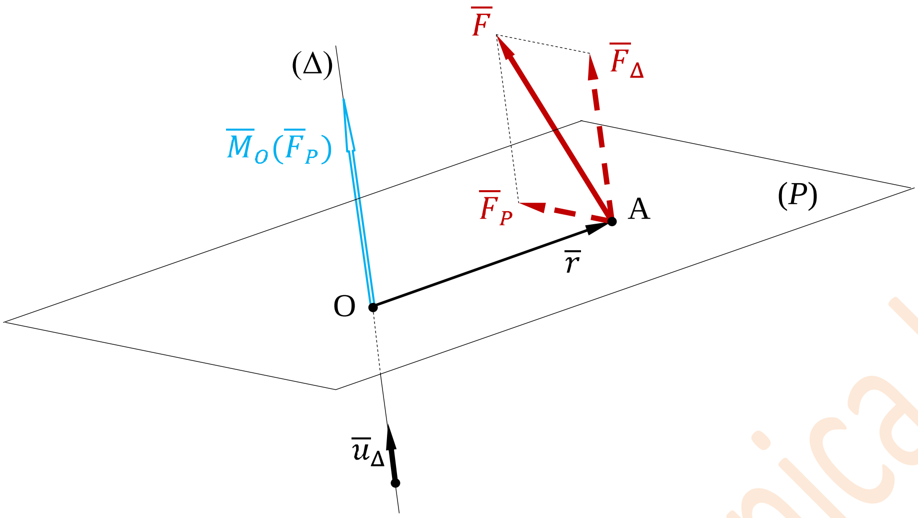


Fig. 3.3.

Pentru determinarea semnului momentului forței în raport cu o axă se va observa sensul de rotație produs de forță în jurul axei (figura 3.4). Dacă observatorul priveşte astfel încât axa săi înțepe pieptul iar sensul de rotație produs de forță în jurul axei este trigonometric, atunci momentul forței în raport cu axa respectivă are semnul „+”.

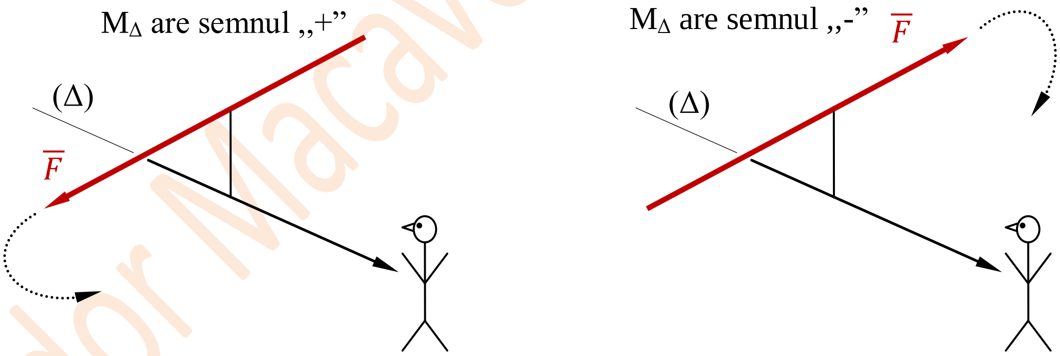
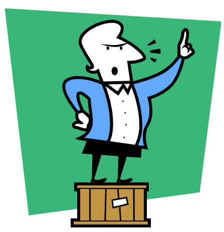


Fig. 3.4.

3.2. Aplicații rezolvate



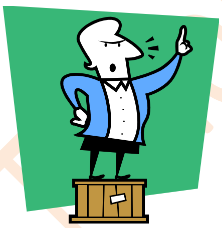
Enunț general

Determinați şi reprezentați momentul rezultant al sistemului de forțe oarecare din figură în raport cu originea sistemului de referință cartezian drept O*xyz*.

Etape de rezolvare

Etapele de rezolvare sunt:

- se alege un sistem de referință drept, cu originea în punctul considerat, dacă acesta nu este precizat;
- se alunecă toate forțele în puncte convenabile (având poziția ușor de definit) şi se descompun pe direcțiile axelor sistemului de referință;
- se determină mărimile tuturor acestor componente;
- se determină momentele rezultante în raport cu axele sistemului de referință; pentru momentul rezultant în raport cu o axa se determină momentele forțelor în raport cu această axă (utilizând regula de semn şi cele două caracteristici enunțate la aspectele teoretice) şi se sumează algebric;
- se scrie expresia analitică a momentului rezultant în raport cu originea sistemului de referință;
- se determină mărimea momentului rezultant în raport cu originea sistemului de referință;
- se determină direcția momentului rezultant în raport cu originea sistemului de referință (cosinuşii directori ai acestuia);
- se reprezintă momentul rezultant în raport cu originea sistemului de referință.



Enunț

APLICAȚIA 1

Fie sistemul de forțe din figura 3.5.a. Cunoscând mărimile forțelor $F_1 = 3F$, $F_2 = 4F$, $F_3 = 2F$, $F_4 = 5F$, $F_5 = F$, $F_6 = 6F$, să se determine şi să se reprezinte momentul rezultant al acestui sistem de forțe în raport cu punctul O.

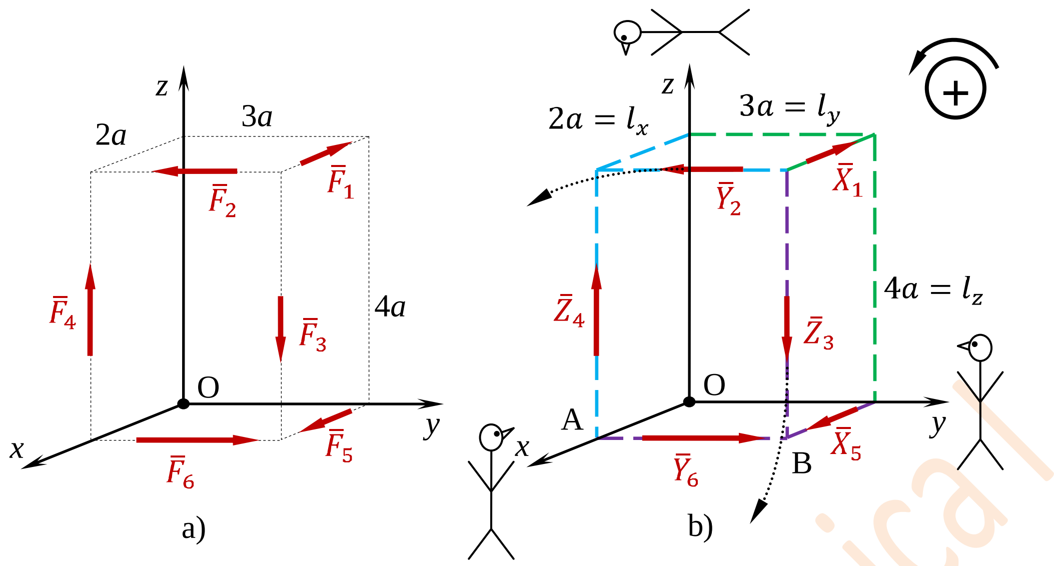


Fig. 3.5

Rezolvare:

În această aplicație forțele din sistemul considerat sunt dispuse pe laturile unui paralelipiped (figura 3.5.a). Se vor nota laturile paralelipipedului cu indicii axelor cu care sunt paralele (l_x, l_y şi respectiv l_z - figura 3.5.b).

Etape de rezolvare:

1) Alegerea sistemului de referință.

Sistemul de referință este indicat prin enunț.

2) Alunecarea forțelor în puncte convenabile şi descompunerea acestora pe direcțiile axelor sistemului de referință.

În această aplicație, deoarece forțele sunt paralele cu axele de coordonate, nu este necesară alunecarea lor. Descompunerea acestor forțe este simplă, dat fiind faptul că o forță paralelă cu o axă nu are componentă decât pe direcția acelei axe. Rezultă sistemul de forțe din figura 3.5.b.

3) Determinarea mărimilor componentelor forțelor pe axele sistemului de referință.

Cum forțele sunt paralele cu axele de coordonate, mărimile componentelor nenule pe direcția axelor sunt egale cu mărimile forțelor. Astfel:

- pentru forța $\bar{F}_1$: $X_1 = F_1 = 3F$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$;
- pentru forța $\bar{F}_2$: $X_2 = 0$, $Y_2 = F_2 = 4F$, $Z_2 = 0$;
- pentru forța $\bar{F}_3$: $X_3 = 0$, $Y_3 = 0$, $Z_3 = F_3 = 2F$;
- pentru forța $\bar{F}_4$: $X_4 = 0$, $Y_4 = 0$, $Z_4 = F_4 = 5F$;
- pentru forța $\bar{F}_5$: $X_5 = F_5 = F$, $Y_5 = 0$, $Z_5 = 0$;
- pentru forța $\bar{F}_6$: $X_6 = 0$, $Y_6 = F_6 = 6F$, $Z_6 = 0$;

4) Determinarea momentelor rezultante în raport cu axele sistemului de referință.

Se va explica determinarea momentului rezultant în raport cu axa Ox:

Înainte de a începe efectiv calculul acestuia, se observă că forțele $\bar{X}_1$ şi $\bar{X}_5$ sunt paralele cu axa Ox iar dreptele suport ale forțelor $\bar{Z}_4$ şi $\bar{Y}_6$ intersectează această axă. Rezultă că momentele acestor forțe în raport cu axa Ox sunt nule.

Pentru determinarea momentelor celor două forțe rămase ($\bar{Y}_2$ şi $\bar{Z}_3$) observatorul se va poziționa astfel încât axa Ox să îi „înțepe” pieptul (figura 3.5.b).

Forța $\bar{Y}_2$ se află într-un plan paralel cu planul yOz (plan perpendicular pe axa Ox). Mărimea momentului forței $\bar{Y}_2$ în raport cu axa Ox este egală cu mărimea momentului forței $\bar{Y}_2$ în raport cu punctul A (punctul în care axa Ox intersectează planul forței $\bar{Y}_2$ - figura 3.5.b). Mărimea momentului forței $\bar{Y}_2$ în raport cu punctul A este egală cu produsul dintre mărimea forței $\bar{Y}_2$ şi mărimea brațului acesteia care este chiar distanța de la dreapta suport a forței $\bar{Y}_2$ la axa Ox, notată cu l_z.

Obs. Pentru identificarea corectă a acestor distanțe, în acest exemplu, se vor folosi culori diferite pentru cele 4 laturi ale paralelipipedului notate identic.

Semnul se determină observând sensul de rotație produs de forța $\bar{Y}_2$ în jurul axei Ox. Din figura 3.5.b acest sens de rotație este trigonometric (antiorar), deci semnul momentului forței $\bar{Y}_2$ în raport cu axa Ox este „+”.

Pentru forța $\bar{Z}_3$ mărimea momentului în raport cu axa Ox este produsul dintre mărimea forței $\bar{Z}_3$ şi mărimea distanței de la dreapta suport a forței $\bar{Z}_3$ la axa Ox, notată cu l_y.

Sensul de rotație al forței $\bar{Z}_3$ în raport cu axa Ox este orar, deci semnul momentului forței $\bar{Z}_3$ în raport cu axa Ox este „-”.

Se poate determina momentul rezultant în raport cu axa Ox:

$$M_x = +Y_2 \cdot l_z - Z_3 \cdot l_y = +4F \cdot 4a - 2F \cdot 3a = 10aF$$

Pentru determinarea momentului rezultant în raport cu axa Oy observatorul se poziționează astfel încât axa Oy să îi „înțepe” pieptul. Forțele pentru care momentul în raport cu axa Oy este nul sunt: $\bar{Y}_2$, $\bar{Y}_6$ (paralele cu axa Oy) şi $\bar{X}_5$ (dreapta sa suport intersectează axa Oy).

Se poate scrie:

$$M_y = -X_1 \cdot l_z + Z_3 \cdot l_x - Z_4 \cdot l_x = -3F \cdot 4a + 2F \cdot 2a - 5F \cdot 2a = -18aF$$

Pentru determinarea momentului rezultant în raport cu axa Oz observatorul se poziționează astfel încât axa Oz să îi „înțepe” pieptul. Forțele pentru care momentul în raport cu axa Oz este nul sunt: $\bar{Z}_3$ şi $\bar{Z}_4$ (paralele cu axa Oz).

Se poate scrie:

$$M_z = +X_1 \cdot l_y - Y_2 \cdot l_x - X_5 \cdot l_y + Y_6 \cdot l_x = +3F \cdot 3a - 4F \cdot 2a - F \cdot 3a + 6F \cdot 2a = 10aF$$

5. Expresia analitică a momentului rezultant în raport cu originea sistemului de referință:

$$\bar{M}_O = M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} + M_z \cdot \bar{k}$$

$$\bar{M}_O = 10aF \cdot \bar{i} - 18aF \cdot \bar{j} + 10aF \cdot \bar{k}$$

6. Mărimea momentului rezultant în raport cu originea sistemului de referință:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$M_O = \sqrt{(10aF)^2 + (-18aF)^2 + (10aF)^2} = 22{,}89aF$$

7. Direcția momentului rezultant în raport cu originea sistemului de referință:

$$\cos\alpha = \frac{M_x}{M_O}, \qquad \cos\beta = \frac{M_y}{M_O}, \qquad \cos\gamma = \frac{M_z}{M_O}$$

$$\cos\alpha = \frac{10aF}{22{,}89aF} = 0{,}437, \qquad \cos\beta = \frac{-18aF}{22{,}89aF} = -0{,}786, \qquad \cos\gamma = \frac{10aF}{22{,}89aF} = 0{,}437$$

8. Reprezentarea momentului rezultant în raport cu originea sistemului de referință:

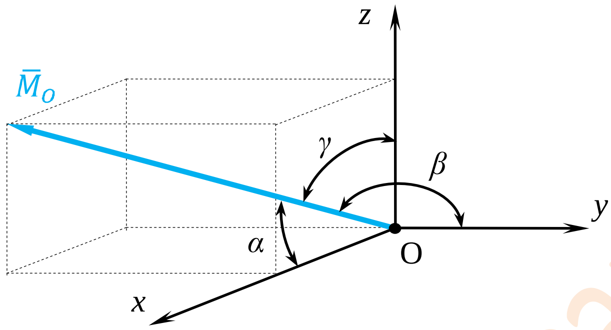
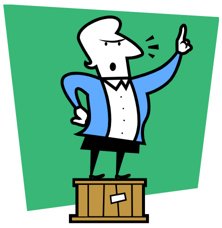


Fig. 3.6



Enunț

APLICAȚIA 2

Fie sistemul de forțe din figura 3.7.a. Cunoscând mărimile forțelor $F_1 = 5\sqrt{2}F$, $F_2 = 2\sqrt{34}F$, $F_3 = 3F$, să se determine și să se reprezinte momentul rezultant al acestui sistem de forțe în raport cu punctul O.

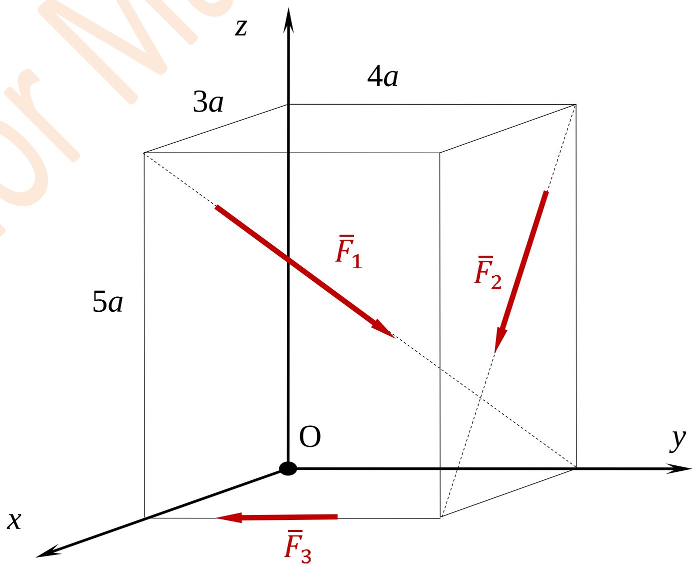


Fig. 3.7

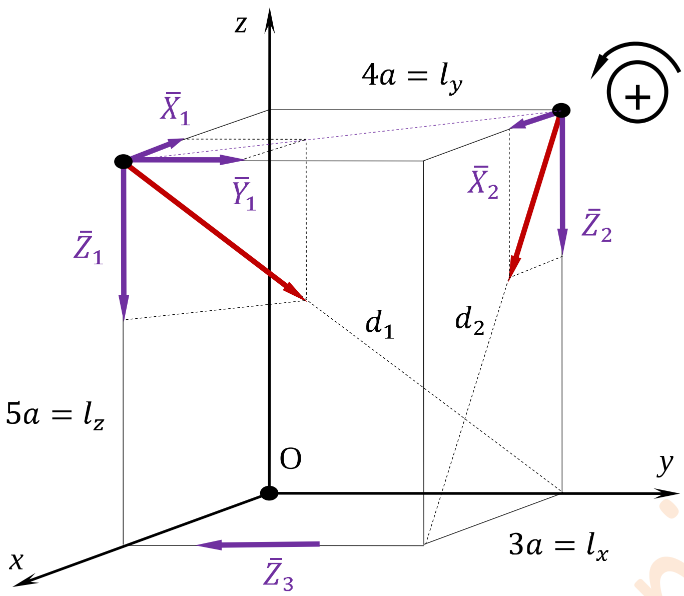


Fig. 3.8

Rezolvare:

Etape de rezolvare:

1) Alegerea sistemului de referință.

Sistemul de referință este indicat prin enunț.

2) Alunecarea forțelor în puncte convenabile și descompunerea acestora pe direcțiile axelor sistemului de referință.

În figura 3.8 s-au evidențiat componentele forțelor pe direcțiile axelor de coordonate.

3) Determinarea mărimilor componentelor forțelor pe axele sistemului de referință.

Forța $\bar{F}_1$:

- mărimea diagonalei paralelipipedului este:

$$d_1 = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2 + (5a)^2} = 5\sqrt{2}a$$

- mărimile componentelor forței $\bar{F}_1$ pe direcțiile axelor de coordonate sunt:

$$X_1 = F_1 \cdot \frac{l_x}{d_1} = 5\sqrt{2}F \cdot \frac{3a}{5\sqrt{2}a} = 3F$$

$$Y_1 = F_1 \cdot \frac{l_y}{d_1} = 5\sqrt{2}F \cdot \frac{4a}{5\sqrt{2}a} = 4F$$

$$Z_1 = F_1 \cdot \frac{l_z}{d_1} = 5\sqrt{2}F \cdot \frac{5a}{5\sqrt{2}a} = 5F$$

Forța $\bar{F}_2$:

- mărimea diagonalei feței paralelipipedului paralelă cu planul *x*O*z* este:

$$d_2 = \sqrt{l_x^2 + l_z^2} = \sqrt{(3a)^2 + (5a)^2} = \sqrt{34}a$$

- mărimile componentelor forței $\bar{F}_2$ pe direcțiile axelor de coordonate sunt:

$$X_2 = F_2 \cdot \frac{l_x}{d_2} = 2\sqrt{34}F \cdot \frac{3a}{\sqrt{34}a} = 6F$$

$$Y_2 = 0$$

$$Z_2 = F_2 \cdot \frac{l_z}{d_2} = 2\sqrt{34}F \cdot \frac{5a}{\sqrt{34}a} = 10F$$

Forța $\bar{F}_3$:

- mărimile componentelor forței $\bar{F}_3$ pe direcțiile axelor de coordonate sunt:

$$X_3 = 0$$

$$Y_3 = F_3 = 3F$$

$$Z_3 = 0$$

4) Determinarea momentelor rezultante în raport cu axele sistemului de referință.

$$M_x = -Y_1 \cdot l_z - Z_2 \cdot l_y = -4F \cdot 5a - 10F \cdot 4a = -60aF$$

Obs.

Momentele în raport cu axa O*x* sunt nule pentru forțele $\bar{X}_1$ și $\bar{X}_2$ (paralele cu O*x*) respectiv $\bar{Z}_1$ și $\bar{Z}_3$ (dreptele lor suport intersectează axa O*x*).

$$M_y = -X_1 \cdot l_z + Z_1 \cdot l_x + X_2 \cdot l_z = F_1 \cdot 0 + X_2 \cdot l_z = +6F \cdot 5a = 30aF$$

Obs.

Dreapta suport a forței $\bar{F}_1$ intersectează axa O*y*, deci momentul acestei forțe în raport cu axa O*y* este nul (acest lucru este pus în evidență prin expresia $F_1 \cdot 0$).

Momentele în raport cu axa Oy sunt nule pentru forțele $\bar{Y}_1$ și $\bar{Y}_3$ (paralele cu Oy) respectiv $\bar{Z}_2$ (dreapta suport intersectează axa Oy).

$$M_z = +Y_1 \cdot l_x - X_2 \cdot l_y - Y_3 \cdot l_x = +4F \cdot 3a - 6F \cdot 4a - 3F \cdot 3a = -21aF$$

Obs.

Momentele în raport cu axa Oz sunt nule pentru forțele $\bar{Z}_1$ și $\bar{Z}_2$ (paralele cu Oz) respectiv $\bar{X}_1$ (dreapta suport intersectează axa Oz).

5. Expresia analitică a momentului rezultant în raport cu originea sistemului de referință:

$$\bar{M}_O = M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} + M_z \cdot \bar{k}$$

$$\bar{M}_O = -60aF \cdot \bar{i} + 30aF \cdot \bar{j} - 21aF \cdot \bar{k}$$

6. Mărimea momentului rezultant în raport cu originea sistemului de referință:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$M_O = \sqrt{(-60aF)^2 + (30aF)^2 + (-21aF)^2} = 70{,}29aF$$

7. Direcția momentului rezultant în raport cu originea sistemului de referință:

$$\cos\alpha = \frac{M_x}{M_O}, \qquad \cos\beta = \frac{M_y}{M_O}, \qquad \cos\gamma = \frac{M_z}{M_O}$$

$$\cos\alpha = \frac{-60aF}{70{,}29aF} = -0854\,, \; \cos\beta = \frac{30aF}{70{,}29aF} = 0{,}427, \; \cos\gamma = \frac{-21aF}{70{,}29aF} = -0{,}298$$

8. Reprezentarea momentului rezultant în raport cu originea sistemului de referință:

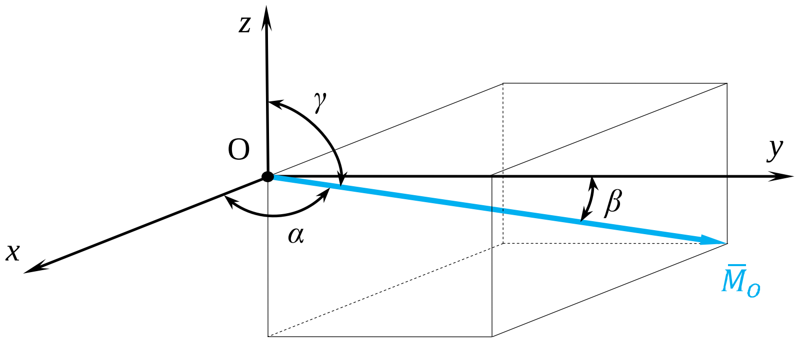


Fig. 3.9

Prezentarea rezultatelor şi modul de evaluare

Cursantul trebuie să prezinte următoarele note de calcul şi rezultate:

- figură cu descompunerea sistemului de forțe – 1p;
- relațiile de determinare ale mărimilor componentelor forțelor şi mărimile rezultate din calcul – 1p;
- calculul detaliat al momentelor rezultante în raport cu axele sistemului de referință – 3p;
- scrierea expresiei analitice a momentului rezultant în raport cu punctul O – 1p;
- determinarea mărimii momentului rezultant în raport cu punctul O – 1p;
- determinarea direcției momentului rezultant în raport cu punctul O (cosinuşii directori) – 1p;
- reprezentarea momentului rezultant în raport cu punctul O – 1p.

La cele 9 puncte se adaugă 1 punct din oficiu.

Cursantul îndeplineşte obiectivele acestui seminar dacă obține în urma evaluării 5 puncte.

Cursantul care obține rezultate eronate într-o etapă nu mai cumulează puncte din etapele ulterioare.