SEMINAR 4

REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE ÎNTR-UN PUNCT

CUPRINS

4. Reducerea sistemelor de forțe într-un punct

Introducere seminar

În acest seminar se va determina sistemul echivalent cel mai simplu pentru un sistem de forțe oarecare.

Pentru aceasta este necesară determinarea efectului sistemului de forțe în raport cu un punct oarecare (de exemplu originea sistemului de referință considerat) şi încadrarea sistemului de forțe într-un caz de reducere.

Obiective seminar

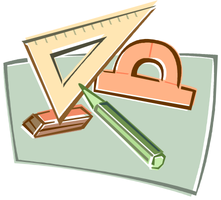
După parcurgerea acestui seminar cursantul va şti:

- să determine efectul unui sistem de forțe într-un punct;
- să încadreze un sistem de forțe într-un caz de reducere;
- să determine şi să reprezinte sistemul echivalent cel mai simplu pentru un sistem de forțe oarecare.

Durata medie de studiu individual

2 ore

Acest interval de timp presupune asimilarea noțiunilor prezentate în acest seminar şi realizarea aplicațiilor.



Cunoştințe necesare

Cunoştințele necesare studiului acestui seminar sunt:

- determinarea rezultantei unui sistem de forțe (seminar 2) ;
- determinarea momentului rezultant al unui sistem de forțe în raport cu un punct (seminar 3);
- invarianții sistemelor de forțe (modul 4, pag 5-7)
- noțiunea de torsor al sistemului de forțe în raport cu un punct (modul 4, pag. 3,4);
- cazurile de reducere ale sistemelor de forțe oarecare (modul 4, pag. 8-10).

4.1. Aspecte teoretice

Fie sistemul de forțe $\overline{F}_i$.

Efectul sistemului de forțe $\overline{F}_i$ într-un punct oarecare O se numeşte torsorul sistemului de forțe în raport cu punctul O şi este ansamblul alcătuit din rezultanta sistemului de forțe, $\overline{R}$, şi momentul rezultant al sistemului de forțe în raport cu punctul O, $\overline{M}_O$:

$$\tau_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = X\cdot\bar{\imath} + Y\cdot\bar{\jmath} + Z\cdot\bar{k}\\ \\ \overline{M}_O = M_x\cdot\bar{\imath} + M_y\cdot\bar{\jmath} + M_z\cdot\bar{k}\end{cases}$$

În modulul 4 (pag. 6) se observă că proiecția momentului rezultant în raport cu un punct oarecare pe direcția rezultantei este un invariant, adică mărimea momentului rezultant este minimă (în valoare absolută) atunci când acesta este paralel cu direcția rezultantei. Se poate introduce noțiunea de torsor minim, ca ansamblul alcătuit din rezultanta sistemului de forțe (de asemenea un invariant al sistemelor de forțe) şi momentul minim:

$$\tau_{min}(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = X\cdot\bar{\imath} + Y\cdot\bar{\jmath} + Z\cdot\bar{k}\\ \\ \overline{M}_{min} = \dfrac{\overline{R}\cdot\overline{M}_O}{R}\cdot\bar{u}_R\end{cases}$$

unde cu $\bar{u}_R$ s-a notat versorul rezultantei.

Locul geometric al punctelor în care momentul rezultant este minim (sau locul geometric al punctelor în care momentul rezultant este paralel cu rezultanta) este o dreaptă ce se numeşte axa centrală (A.C.). Ecuațiile axei centrale sunt:

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z}$$

unde:

- M_x, M_y şi M_z sunt proiecțiile momentului rezultant în raport cu un punct oarecare O pe axele de coordonate;
- X, Y şi Z sunt proiecțiile rezultantei pe axele de coordonate;
- x, y şi z sunt coordonatele punctelor axei centrale într-un sistem de referință cartezian ce are originea în punctul considerat (punctul O).

În funcție de valorile elementelor torsorului unui sistem de forțe în raport cu un punct oarecare O, sistemele de forțe se încadrează în categorii denumite cazuri de reducere. Pentru sistemele de forțe oarecare cazurile de reducere sunt:

1) $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_O = 0$. Sistemul de forțe este în echilibru (acesta este sistemul echivalent cel mai simplu);

2) $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_O \neq 0$. Sistemul de forțe este echivalent cu un cuplu de forțe având momentul egal cu $\overline{M}_O$ (acesta este sistemul echivalent cel mai simplu);

3) $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O = 0$. Sistemul de forțe se reduce la o rezultantă unică ce trece prin punctul O (aceasta este sistemul echivalent cel mai simplu). Locul geometric al punctelor în care obținem această rezultantă unică este dreapta suport a rezultantei ce trece prin punctul O.

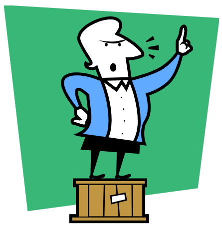
4) $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O \neq 0$. Se disting două situații:

a) $\overline{R} \cdot \overline{M}_O = 0$. Sistemul echivalent cel mai simplu este o rezultantă unică ce nu trece prin punctul O. Dreapta suport a acestei rezultante unice este axa centrală, a cărei poziție se determină utilizând ecuațiile axei centrale.

b) $\overline{R} \cdot \overline{M}_O \neq 0$. Sistemul de forțe se reduce la o dinamă. În acest caz, momentul minim este diferit de zero (având direcția paralelă cu direcția rezultantei) şi va trebui determinat.

Locul geometric al punctelor de moment minim este axa centrală, a cărei poziție se determină cu ajutorul ecuațiilor axei centrale.

4.2. Aplicații rezolvate



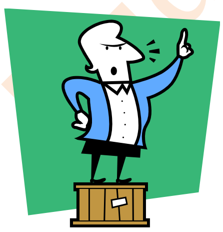
Enunț general

Să se determine sistemul echivalent cel mai simplu pentru sistemul de forțe din figură.

Etape de rezolvare

Etapele de rezolvare sunt:

- se alege un sistem de referință cartezian drept, dacă acesta nu este precizat;
- se alunecă toate forțele în puncte convenabile (având poziția ușor de definit) și se descompun pe direcțiile axelor sistemului de referință;
- se determină mărimile tuturor acestor componente;
- se determină rezultanta sistemului de forțe;
- se determină momentul rezultant în raport cu originea sistemului de referință;
- se scrie expresia torsorului sistemului de forțe în raport cu originea sistemului de referință;
- se încadrează sistemul de forțe într-un caz de reducere;
- se determină sistemul echivalent cel mai simplu;
- se reprezintă sistemul echivalent cel mai simplu.



Enunț

APLICAȚIA 1

Fie sistemul de forțe din figura 4.1.a. Cunoscând mărimile forțelor $F_1 = \sqrt{29}F$, $F_2 = 10F$, $F_3 = 7F$, să se determine și să se reprezinte sistemul echivalent cel mai simplu.

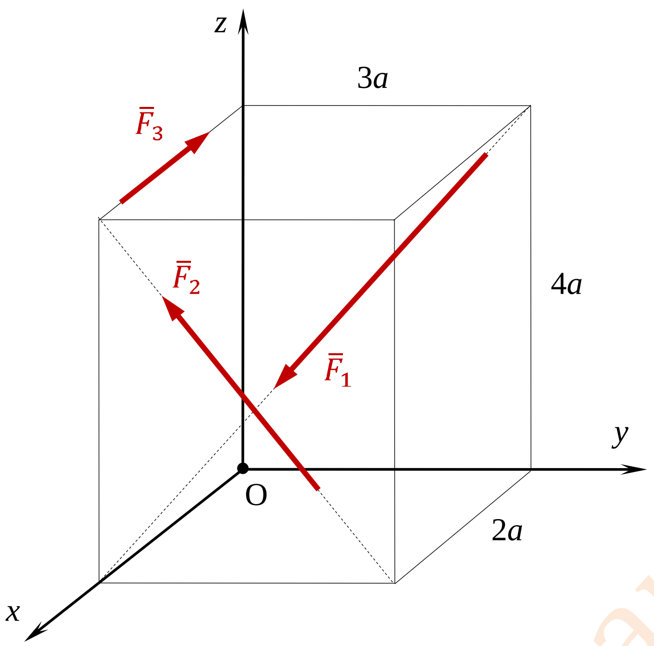


Fig. 4.1

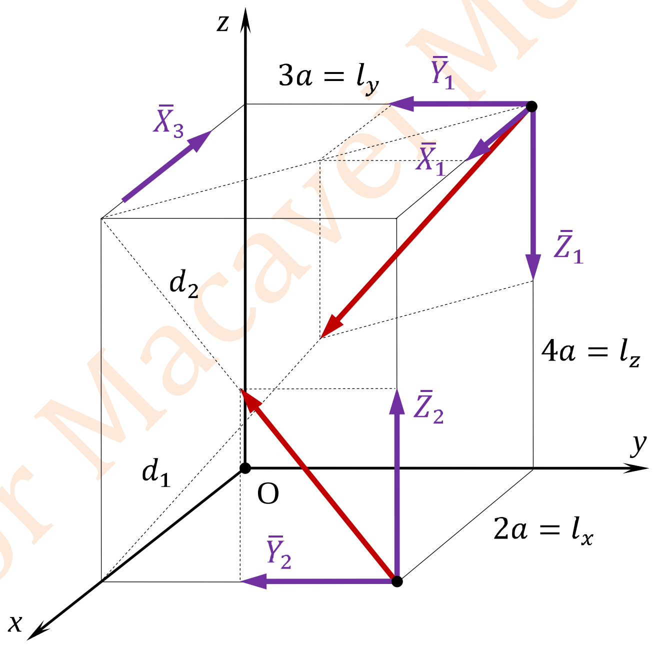


Fig. 4.2

Rezolvare:

Etape de rezolvare:

1) Alegerea sistemului de referință.

Sistemul de referință este indicat prin enunț.

2) Alunecarea forțelor în puncte convenabile şi descompunerea acestora pe direcțiile axelor sistemului de referință.

În figura 4.3 s-au evidențiat componentele forțelor pe direcțiile axelor de coordonate.

3) Determinarea mărimilor componentelor forțelor pe axele sistemului de referință.

Forța $\bar{F}_1$:

- mărimea diagonalei paralelipipedului este:

$$d_1 = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} = \sqrt{(2a)^2 + (3a)^2 + (4a)^2} = \sqrt{29}a$$

- mărimile componentelor forței $\bar{F}_1$ pe direcțiile axelor de coordonate sunt:

$$X_1 = F_1 \cdot \frac{l_x}{d_1} = \sqrt{29}F \cdot \frac{2a}{\sqrt{29}a} = 2F$$

$$Y_1 = F_1 \cdot \frac{l_y}{d_1} = \sqrt{29}F \cdot \frac{3a}{\sqrt{29}a} = 3F$$

$$Z_1 = F_1 \cdot \frac{l_z}{d_1} = \sqrt{29}F \cdot \frac{4a}{\sqrt{29}a} = 4F$$

Forța $\bar{F}_2$:

- mărimea diagonalei feței paralelipipedului paralelă cu planul *y*O*z* este:

$$d_2 = \sqrt{l_y^2 + l_z^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$$

- mărimile componentelor forței $\bar{F}_2$ pe direcțiile axelor de coordonate sunt:

$$X_2 = 0$$

$$Y_2 = F_2 \cdot \frac{l_y}{d_2} = 10F \cdot \frac{3a}{5a} = 6F$$

$$Z_2 = F_2 \cdot \frac{l_z}{d_2} = 10F \cdot \frac{4a}{5a} = 8F$$

Forța $\bar{F}_3$:

- mărimile componentelor forței $\bar{F}_3$ pe direcțiile axelor de coordonate sunt:

$$X_3 = F_3 = 7F$$
$$Y_3 = 0$$
$$Z_3 = 0$$

4) Determinarea rezultantei sistemului de forțe.

$$\bar{R} = X \cdot \bar{\imath} + Y \cdot \bar{\jmath} + Z \cdot \bar{k}$$

$$X = \sum X_i = X_1 - X_3 = 2F - 7F = -5F$$
$$Y = \sum Y_i = -Y_1 - Y_2 = -3F - 6F = -9F$$
$$Z = \sum Z_i = -Z_1 + Z_2 = -4F + 8F = 4F$$

$$\bar{R} = -5F \cdot \bar{\imath} - 9F \cdot \bar{\jmath} + 4F \cdot \bar{k}$$
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(-5F)^2 + (-9F)^2 + (4F)^2} = 11{,}05F$$

5) Determinarea momentului rezultant în raport cu originea sistemului de referință.

$$\bar{M}_O = M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} + M_z \cdot \bar{k}$$

$$M_x = F_1 \cdot 0 + Z_2 \cdot l_y = 0 + 8F \cdot 3a = 24aF$$
$$M_y = X_1 \cdot l_z - Z_2 \cdot l_x - X_3 \cdot l_z = +2F \cdot 4a - 8F \cdot 2a - 7F \cdot 4a = -36aF$$
$$M_z = -X_1 \cdot l_y - Y_2 \cdot l_x = -2F \cdot 3a - 6F \cdot 2a = -18aF$$

$$\bar{M}_O = 24aF \cdot \bar{i} - 36aF \cdot \bar{j} - 18aF \cdot \bar{k}$$
$$M_O = \sqrt{(24aF)^2 + (-36aF)^2 + (-18aF)^2} = 46{,}86aF$$

6) Torsorul sistemului de forțe în raport cu originea sistemului de referință este:

$$\tau_O(\bar{F}_i)\begin{cases}\bar{R} = -5F \cdot \bar{\imath} - 9F \cdot \bar{\jmath} + 4F \cdot \bar{k} \\ \\ \bar{M}_O = 24aF \cdot \bar{i} - 36aF \cdot \bar{j} - 18aF \cdot \bar{k}\end{cases}$$

7) Încadrarea sistemului de forțe într-un caz de reducere.

Se observă că rezultanta şi momentul rezultant în raport cu punctul O sunt diferite de zero. În această situație trebuie verificat dacă cei doi vectori sunt ortogonali:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = (-5F) \cdot (24aF) + (-9F) \cdot (-36aF) + (4F) \cdot (-18aF) = 132aF^2 \neq 0$$

Rezultă că sistemul de forțe se reduce la o dinamă (cazul 4b).

8) Determinarea sistemului echivalent cel mai simplu.

Sistemul echivalent cel mai simplu este torsorul minim.

Se determină proiecția momentului minim pe direcția rezultantei:

$$M_{min} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{R} = \frac{132aF^2}{11{,}05F} = 11{,}95aF$$

Deorece proiecția momentului minim pe direcția rezultantei are semnul „+” rezultă că momentul minim şi rezultanta au acelaşi sens.

Expresia torsorului minim este:

$$\tau_{min}(\bar{F}_i)\begin{cases}\bar{R} = -5F \cdot \bar{\imath} - 9F \cdot \bar{\jmath} + 4F \cdot \bar{k} \\ \\ \bar{M}_{min} = 11{,}95aF \cdot \bar{u}_R\end{cases}$$

Locul geometric al punctelor de torsor minim este axa centrală. Ecuațiile axei centrale sunt:

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z}$$

$$\frac{24aF - 4F \cdot y + (-9F) \cdot z}{-5F} = \frac{-36aF - (-5F) \cdot z + 4F \cdot x}{-9F} =$$
$$= \frac{-18aF - (-9F) \cdot x + (-5F) \cdot y}{4F}$$

Ecuațiile axei centrale se pot scrie sub forma:

$$\begin{cases}20 \cdot x + 36 \cdot y + 106 \cdot z = 396a \\ 45 \cdot x - 41 \cdot y - 36 \cdot z = -6a\end{cases}$$

Pentru reprezentarea axei centrale se poate proceda în două moduri:

- se determină pozițiile a două puncte ale axei centrale (de exemplu intersecțiile axei cu două plane de coordonate);
- se determină poziția unui singur punct al axei centrale şi se construieşte paralela prin acest punct la direcția rezultantei.

Se va alege a doua variantă.

Se determină intersecția axei centrale cu planul yOz $(x = 0)$. Ecuațiile devin:

$$\begin{cases} 36 \cdot y + 106 \cdot z = 396a \\ -41 \cdot y - 36 \cdot z = -6\,a \end{cases}$$

Se rezolvă sistemul de două ecuații cu două necunoscute şi rezultă poziția punctului de intersecție al axei centrale cu planul yOz:

A(0; -4,47a; 5,25a)

9) Reprezentarea sistemului echivalent cel mai simplu.

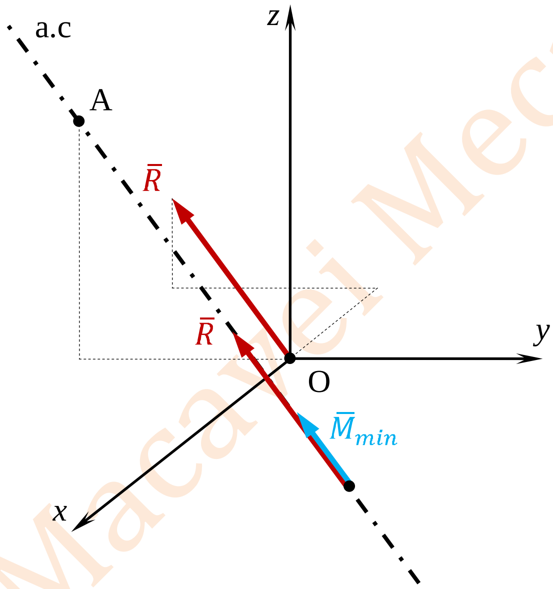


Fig. 4.3

Torsorul minim se reprezintă într-un punct oarecare al axei centrale.

Se observă că pentru reprezentarea sistemului echivalent cel mai simplu s-au utilizat trei scări diferite pentru cele trei tipuri de elemente ce apar în figura 4.3 (coordonată, forță şi momentul forței).

Prezentarea rezultatelor şi modul de evaluare

Cursantul trebuie să prezinte următoarele:

- figură cu descompunerea sistemului de forțe – 1p;
- determinarea mărimilor componentelor forțelor pe direcțiile axelor de coordonate – 1p;
- determinarea rezultantei sistemului de forțe – 1p;
- determinarea momentului rezultant în raport cu originea sistemului de referință – 2p;
- scrierea torsorului sistemului de forțe în raport cu originea sistemului de referință – 1p;
- identificarea cazului de reducere – 1p;
- determinarea sistemului echivalent cel mai simplu – 1p;
- reprezentarea sistemului echivalent cel mai simplu – 1p.

La cele 9 puncte se adaugă 1 punct din oficiu.

Cursantul îndeplineşte obiectivele acestui seminar dacă obține în urma evaluării 5 puncte.

Cursantul care obține rezultate eronate într-o etapă nu mai cumulează puncte din etapele ulterioare.