

**SEMINAR 6****SISTEME DE FORȚE PARALELE****CUPRINS**

<b>6. Sisteme de forțe paralele</b>	.....1
Cuprins	.....1
Introducere	.....1
<b>6.1. Aspecte teoretice</b>	.....2
<b>6.2. Aplicații rezolvate</b>	.....3

**6. Sisteme de forțe coplanare**

**Introducere  
seminar**

În acest seminar se va determina efectul unui sistem de forțe paralele într-un punct și se va determina poziția centrului forțelor paralele.



**Obiective seminar**

După parcurgerea acestui seminar cursantul va ști:

- să determine rezultanta unui sistem de forțe paralele;
- să determine și să reprezinte momentul rezultat al unui sistem de forțe paralele într-un punct;
- să determine poziția centrului forțelor paralele.



**Durata medie de  
studiu individual**

2 ore

Acest interval de timp presupune asimilarea noțiunilor prezentate în acest seminar și realizarea aplicațiilor.



### Cunoștințe necesare

Cunoștințele necesare studiului acestui seminar sunt:

- determinarea rezultantei unui sistem de forțe (seminar 2) ;
- determinarea momentului rezultat al unui sistem de forțe în raport cu un punct (seminar 3);
- noțiunea de torsesor al sistemului de forțe în raport cu un punct (modul 4, pag. 3,4);
- studiul sistemelor de forțe paralele (modul 5).

### 6.1. Aspecte teoretice

Sistemul de forțe paralele este sistemul format din forțe care au dreptele suport paralele.

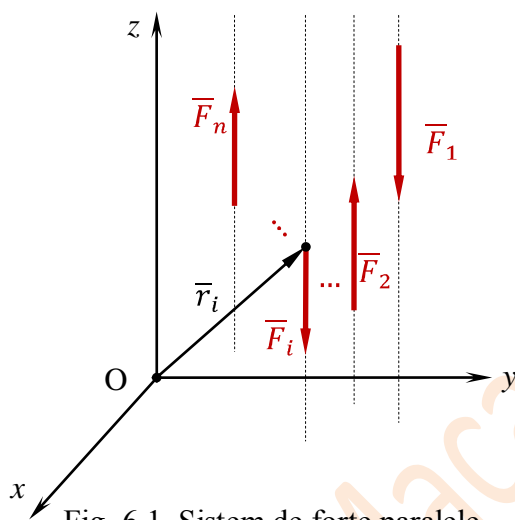


Fig. 6.1. Sistem de forțe paralele

Fie sistemul de forțe  $\bar{F}_i$ , forțe paralele cu axa Oz a unui sistem de referință cartezian.

Torsesorul sistemului de forțe în raport cu punctul O va fi:

$$\tau_o(\bar{F}_i) \begin{cases} \bar{R} = \sum \bar{F}_i = (\sum F_i) \cdot \bar{k} \\ \bar{M}_o = \sum \bar{M}_o(\bar{F}_i) = (\sum M_{xi}) \cdot \bar{i} + (\sum M_{yi}) \cdot \bar{j} = M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} \end{cases}$$

Un caz particular al sistemelor forțelor paralele este cel al sistemelor de forțe paralele vectori legați (punctele de aplicație ale forțelor au poziții bine definite în spațiu). Dacă forțele sistemului sunt vectori legați atunci și rezultanta sistemului (când există) este un vector legat iar punctul de aplicație al rezultantei se numește centrul forțelor paralele.

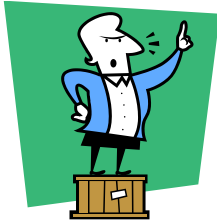
Poziția centrului forțelor paralele este dată de vectorul de poziție:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum (\bar{r}_i \cdot F_i)}{\sum F_i}$$

Coordonatele centrului forțelor paralele sunt:

$$x_c = \frac{\sum(x_i \cdot F_i)}{\sum F_i}, \quad y_c = \frac{\sum(y_i \cdot F_i)}{\sum F_i}, \quad z_c = \frac{\sum(z_i \cdot F_i)}{\sum F_i}$$

## 5.2. Aplicații rezolvate



### Enunț general

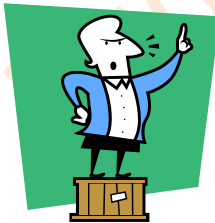


### Etape de rezolvare

Să se determine și să se reprezinte efectul mecanic în punctul O produs de sistemul de forțe (vectori legați) din figură. Să se determine centrul forțelor paralele.

Etapele de rezolvare sunt:

- se alege un sistem de referință cartezian drept, dacă acesta nu este precizat;
- se alunecă toate forțele în puncte convenabile (având poziția ușor de definit) și se descompun pe direcțiile axelor sistemului de referință;
- se determină mărimile tuturor acestor componente;
- se determină rezultanta sistemului de forțe;
- se determină momentul resultant în raport cu originea sistemului de referință;
- se scrie expresia torsorului sistemului de forțe în raport cu originea sistemului de referință;
- se determină poziția centrului forțelor paralele.



### Enunț

#### APLICAȚIA 1

Fie sistemul de forțe din figura 6.2. Cunoscând mărimile forțelor  $F_1 = 3F$ ,  $F_2 = 2F$ ,  $F_3 = 4F$ ,  $F_4 = 5F$  și coordonatele punctelor lor de aplicație în raport cu un sistem cartezian ( $A_1(-2a, -3a, 0)$ ,  $A_2(a, 2a, 8a)$ ,  $A_3(3a, 6a, -a)$  și  $A_4(4a, -a, 2a)$ ) să se determine și să se reprezinte efectul acestui sistem de forțe în raport cu punctul O și să se determine poziția punctului de aplicație al rezultantei unice (dacă aceasta există).

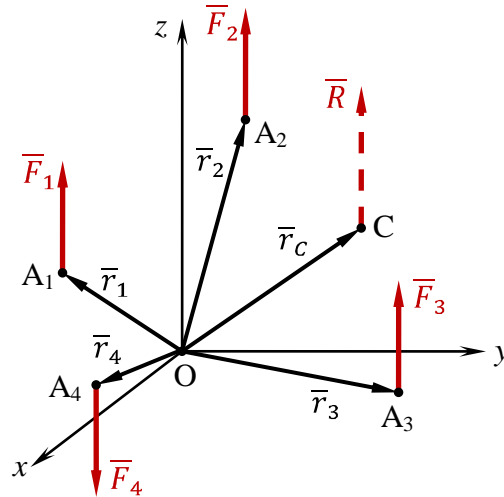


Fig. 6.2

Torsorul sistemului de forțe paralele în raport cu punctul O este:

$$\tau_o(\bar{F}_i) \begin{cases} \bar{R} = \sum \bar{F}_i = (\sum F_i) \cdot \bar{k} \\ \bar{M}_o = \sum \bar{M}_o(\bar{F}_i) = (\sum M_{xi}) \cdot \bar{i} + (\sum M_{yi}) \cdot \bar{j} = M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} \end{cases}$$

$$\sum F_i = F_1 + F_2 + F_3 - F_4 = 3F + 2F + 4F - 5F = 4F$$

$$\bar{M}_o = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2a & -3a & 0 \\ 0 & 0 & 3F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & 2a & 8a \\ 0 & 0 & 2F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3a & 6a & -a \\ 0 & 0 & 4F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4a & -a & 2a \\ 0 & 0 & -5F \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_o &= (-3F \cdot 3a + 2F \cdot 2a + 4F \cdot 6a + (-5F) \cdot (-a)) \cdot \bar{i} \\ &\quad - (-3F \cdot 2a + 2F \cdot a + 4F \cdot 3a - 5F \cdot 4a) \cdot \bar{j} = 24aF \cdot \bar{i} + 12aF \cdot \bar{j} \end{aligned}$$

Torsorul sistemului de forțe paralele în raport cu punctul O este:

$$\tau_o(\bar{F}_i) \begin{cases} \bar{R} = 4F \cdot \bar{k} \\ \bar{M}_o = 24aF \cdot \bar{i} + 12aF \cdot \bar{j} \end{cases}$$

Coordonatele centrului forțelor paralele sunt:

$$x_c = \frac{\sum(x_i \cdot F_i)}{\sum F_i} = \frac{-2a \cdot 3F + a \cdot 2F + 3a \cdot 4F - 4a \cdot 5F}{3F + 2F + 4F - 5F} = -\frac{12aF}{4F} = -3a$$

$$y_c = \frac{\sum(y_i \cdot F_i)}{\sum F_i} = \frac{-3a \cdot 3F + 2a \cdot 2F + 6a \cdot 4F + a \cdot 5F}{3F + 2F + 4F - 5F} = \frac{24aF}{4F} = 6a$$

$$z_c = \frac{\sum(z_i \cdot F_i)}{\sum F_i} = \frac{0 + 8a \cdot 2F - a \cdot 4F + 2a \cdot 5F}{3F + 2F + 4F - 5F} = \frac{22aF}{4F} = 5,5a$$

Rezultă punctul C, de coordonate  $(-3a; 6a; 5,5a)$  care este punctul de aplicație al rezultantei unice (figura 6.2).



**Prezentarea  
rezultatelor și  
modul de evaluare**

Cursantul trebuie să prezinte următoarele:

- determinarea rezultantei sistemului de forțe – 2p;
- determinarea momentului resultant în raport cu originea sistemului de referință – 3p;
- scrierea torsorului sistemului de forțe în raport cu originea sistemului de referință – 1p;
- determinarea poziției centrului forțelor paralele – 3p.

La cele 9 puncte se adaugă 1 punct din oficiu.

Cursantul îndeplinește obiectivele acestui seminar dacă obține în urma evaluării 6 puncte.

Cursantul care obține rezultate eronate într-o etapă nu mai cumulează puncte din etapele ulterioare.