

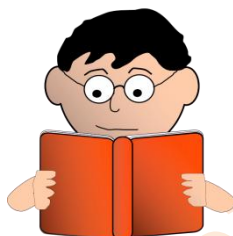
SEMINAR 7**CENTRE DE GREUTATE****CUPRINS**

7. Centre de greutate1
Cuprins1
Introducere1
7.1. Aspecte teoretice2
7.2. Aplicații rezolvate3

7. Centre de greutate

**Introducere
seminar**

În acest seminar se va determina poziția centrului de greutate pentru o placă plană omogenă alcătuită prin alăturare de plăci plane omogene de formă simplă.



Obiective seminar

După parcurgerea acestui seminar cursantul va ști:

- să identifice plăcile plane omogene simple ce alcătuiesc o placă plană omogenă ;
- să determine poziția centrului de greutate pentru o placă plană omogenă;
- să reprezinte poziția centrului de greutate pentru o placă plană omogenă.



**Durata medie de
studiu individual**

2 ore

Acest interval de timp presupune asimilarea noțiunilor prezentate în acest seminar și realizarea aplicațiilor.



Cunoștințe necesare

Cunoștințele necesare studiului acestui seminar sunt:

- ariile unor figuri geometrice simple (dreptunghi, triunghi, cerc, semicerc, sfert de cerc);
- formulele de determinare a poziției centrului de greutate pentru o placă plană omogenă alcătuită prin alăturare de plăci de formă simplă (modul 6).

7.1. Aspecte teoretice

În cazul plăcilor omogene alcătuite prin asamblarea unor plăci simple uzuale, definite geometric, cărora li se cunosc pozițiile centrelor de greutate în raport cu un sistem de referință ales, poziția centrului de greutate se determină cu relațiile:

$$x_c = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i}, y_c = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

unde A_i este aria plăcii simple „ i ” iar x_i și y_i sunt coordonatele centrului de greutate al plăcii simple „ i ” în raport cu sistemul de referință ales.

Se prezintă în continuare ariile și pozițiile centrelor de greutate pentru câteva plăci simple:

Placa dreptunghiulară:

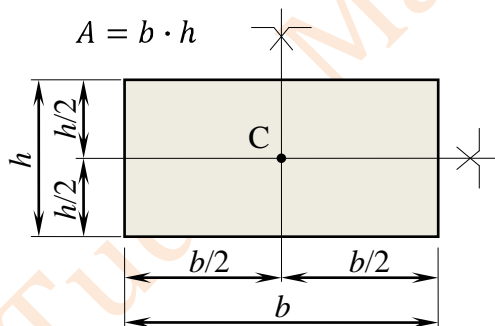


Fig. 7.1

Placa triunghi dreptunghic:

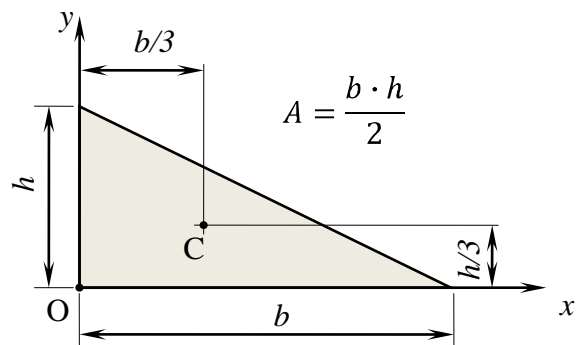


Fig. 7.2

Pentru sectoare de cerc particulare (disc, semidisc și sfert de disc) se prezintă ariile și pozițiile centrelor de greutate (figura 7.3):

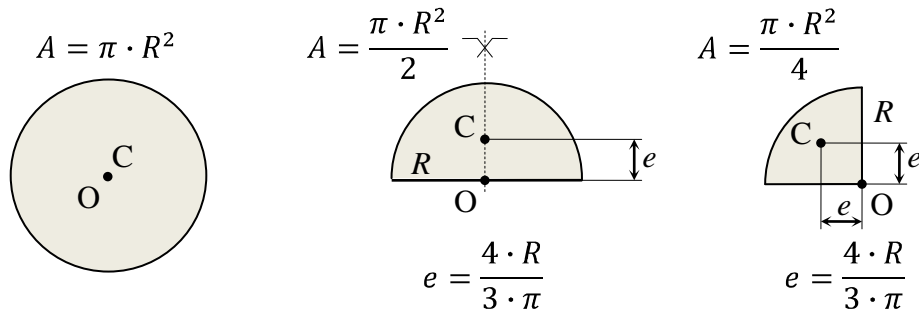
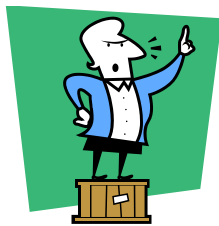


Fig. 7.3

7.2. Aplicații rezolvate



Enunț general

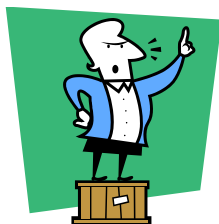


Etape de rezolvare

Să se determine și să se reprezinte poziția centrului de greutate pentru placa plană omogenă din figură.

Etapele de rezolvare sunt:

- se împarte placa plană omogenă în cât mai puține plăci simple;
- se alege un sistem de referință drept;
- se determină pentru fiecare placă simplă aria și coordonate centrului de greutate în raport cu sistemul de referință ales;
- se ariile și coordonatele determinate se centralizează într-un tabel și se determină momentele statice ale plăcii plane omogene în raport cu axele sistemului de referință precum și aria acestei plăci;
- se determină poziția centrului de greutate al plăcii plane;
- se reprezintă poziția centrului de greutate al plăcii plane.



Enunț

APLICAȚIA 1

Să se determine și să se reprezinte poziția centrului de greutate al plăcii plane omogene din figura 7.4.

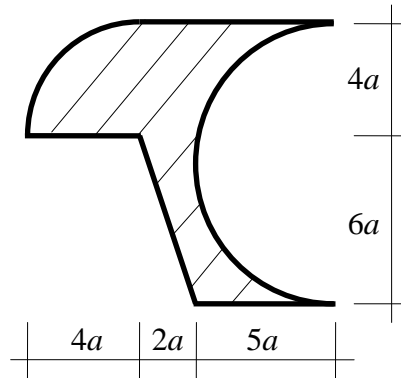


Fig. 7.4

Rezolvare:

Etape de rezolvare:

1) Se împarte placa plană omogenă în cât mai puține plăci simple.

Se recomandă algoritmul următor:

- se identifică placile de formă simplă având ca limite curbe simple (cerc sau arce de cerc) și se elimină (dacă suprafața plăcii este plină) sau se adaugă (dacă suprafața plăcii este un gol);

În exemplul considerat se observă o placă delimitată de un sfert de cerc de rază $4a$ care este plină (aceasta se numerotează și se elimină). Placa de acoperit devine:

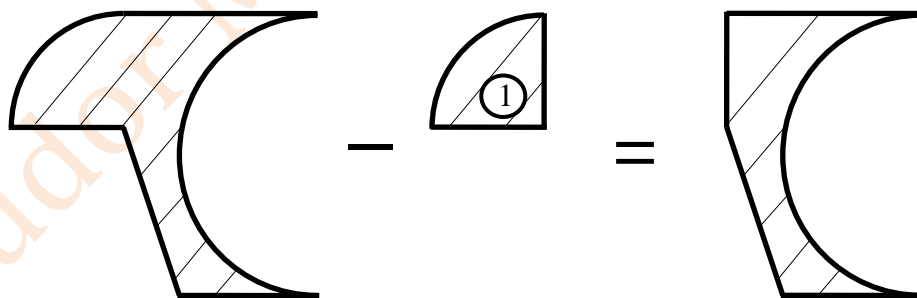


Fig. 7.5

Următoarea placă delimitată de un arc de cerc este cea care are ca limită semicercul de rază $5a$. Aceasta este de fapt un gol, deci această placă se va adăuga la placa rămasă, după ce se numerotează. Rezultă:

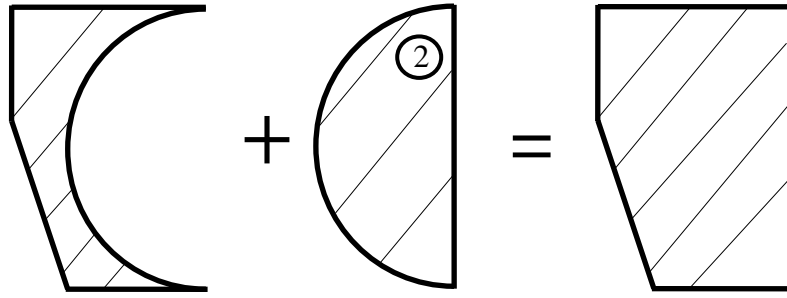


Fig. 7.6

- se identifică plăcile având ca limită segmente de dreaptă de direcție oarecare (nu horizontale sau verticale); aceste plăci au formă de triunghi dreptunghic:

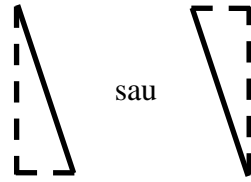


Fig. 7.7

Se prezintă ambele variante și se vor discuta:

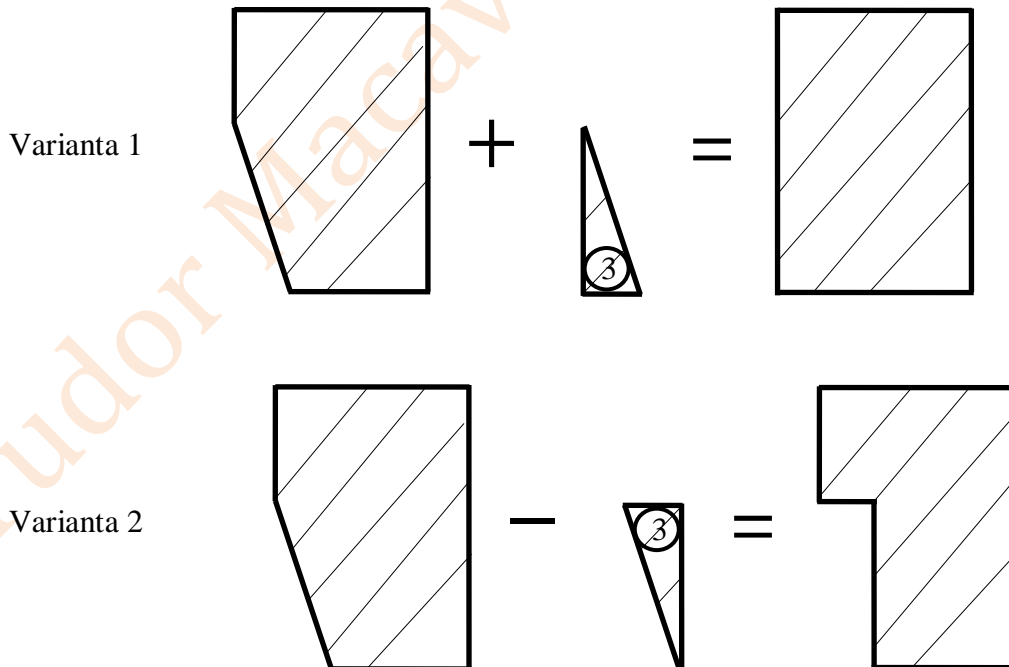


Fig. 7.8

Se observă că în varianta 1 rezultă o placă ce se acoperă cu o singură placă de tip dreptunghi iar în varianta 2 rezultă o placă ce se acoperă cu două plăci de tip dreptunghi. Se alege prima variantă deoarece oferă un număr mai mic de plăci simple.

- se identifică plăcile având ca limită segmente de dreaptă orizontale sau verticale; aceste plăci au formă dreptunghiulară:

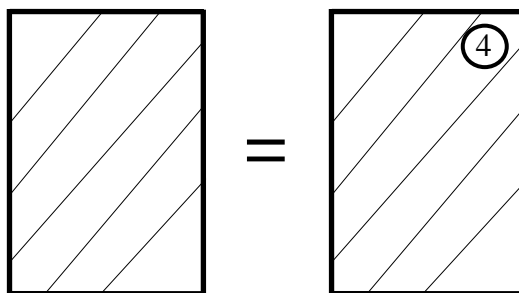


Fig. 7.9

Rezultă că placa plană omogenă de rezolvat este rezultatul alăturării a patru plăci simple:

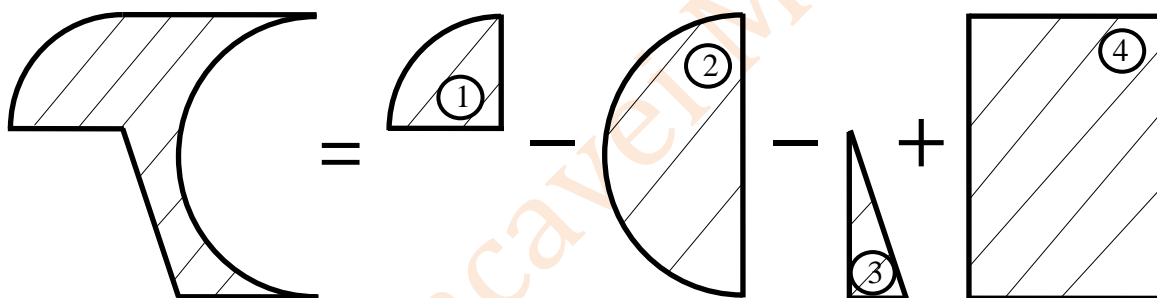


Fig. 7.10

2) Alegerea sistemului de referință

Sistemul de referință se alege astfel încât volumul de calcul să fie cât mai mic. Pentru cazul general, dacă placa admite o axă de simetrie, se recomandă ca acea axă de simetrie să coincidă cu o axă de coordonate (se determină în mod direct o coordonată a centrului de greutate); dacă se observă că centrele de greutate ale plăcilor simple sunt coliniare, este indicat să se aleagă o axă de coordonate dreapta ce conține acele puncte.

În aplicațiile curente se recomandă ca sistemul de referință să fie ales astfel încât toate coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor simple să fie pozitive. Aceasta se realizează atunci când placa plană omogenă se află în primul cadran al sistemului de referință ales.

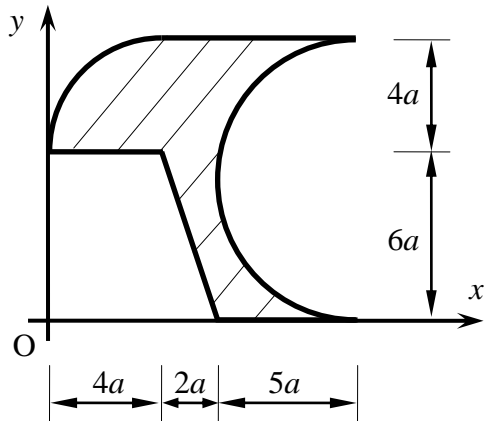


Fig. 7.11

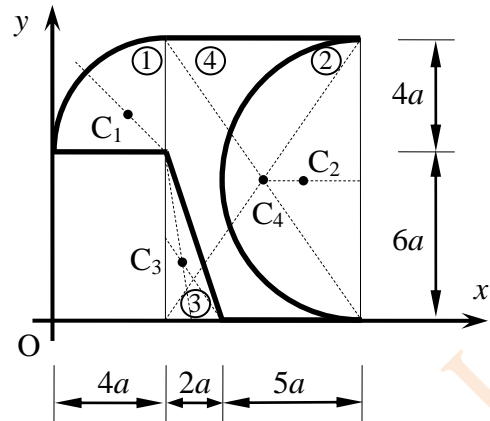


Fig. 7.12

3) Determinarea ariei și a coordonatelor centrului de greutate în raport cu sistemul de referință ales pentru fiecare placă simplă.

Obs. Pentru plăcile simple care se adaugă, semnul ariei se va considera „-”.

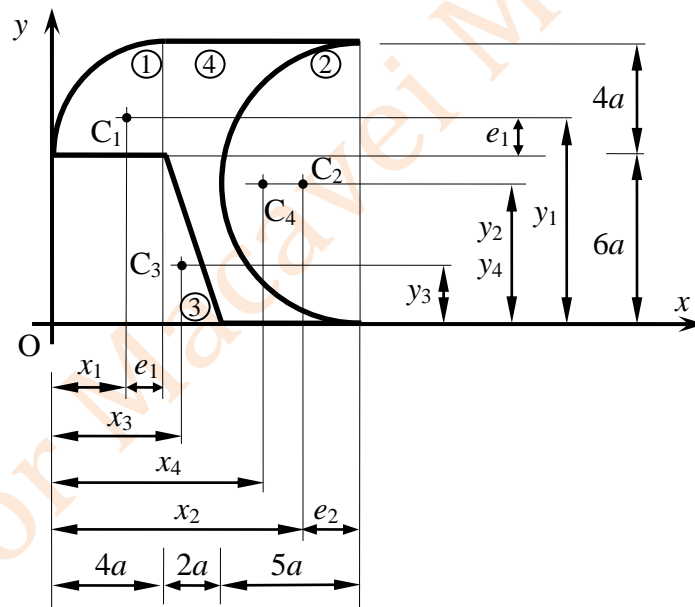


Fig. 7.13

Placa simplă 1:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot (4a)^2}{4} = 12,57a^2$$

$$e_1 = \frac{4 \cdot 4a}{3 \cdot \pi} = 1,70a$$

$$x_1 = 4a - e_1 = 4a - 1,7a = 2,30a$$

$$y_1 = 6a + e_1 = 6a + 1,7a = 7,70a$$

Placa simplă 2:

$$A_2 = -\frac{\pi \cdot (5a)^2}{2} = -39,27a^2$$

$$e_2 = \frac{4 \cdot 5a}{3 \cdot \pi} = 2,12a$$

$$x_2 = 11a - e_2 = 11a - 2,12a = 8,88a$$

$$y_2 = \frac{10a}{2} = 5a$$

Placa simplă 3:

$$A_3 = -\frac{2a \cdot 6a}{2} = -6a^2$$

$$x_3 = 4a + \frac{1}{3} \cdot 2a = 4,67a$$

$$y_3 = \frac{1}{3} \cdot 6a = 2a$$

Placa simplă 4:

$$A_4 = 7a \cdot 10a = 70a^2$$

$$x_4 = 4a + \frac{1}{2} \cdot 7a = 7,5a$$

$$y_4 = \frac{1}{2} \cdot 10a = 5a$$

4) Centralizarea rezultatelor

Fig.	A_i	x_i	y_i	$A_i \cdot x_i$	$A_i \cdot y_i$
1	$12,57a^2$	$2,30a$	$7,70a$	$28,91a^3$	$96,79a^3$
2	$-39,27a^2$	$8,88a$	$5a$	$-348,72a^3$	$-196,35a^3$
3	$-6a^2$	$4,67a$	$2a$	$-28a^3$	$-12a^3$
4	$70a^2$	$7,50a$	$5a$	$525a^3$	$350a^3$
	$\sum A_i$			$\sum A_i \cdot x_i$	$\sum A_i \cdot y_i$
	$37,30a^2$			$177,19a^3$	$238,44a^3$

5) Determinarea poziției centrului de greutate al plăcii plane omogene:

$$x_c = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i} = \frac{177,19a^3}{37,30a^2} = 4,75a$$

$$y_c = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{238,44a^3}{37,30a^2} = 6,39a$$

6) Reprezentarea poziției centrului de greutate al plăcii plane omogene:

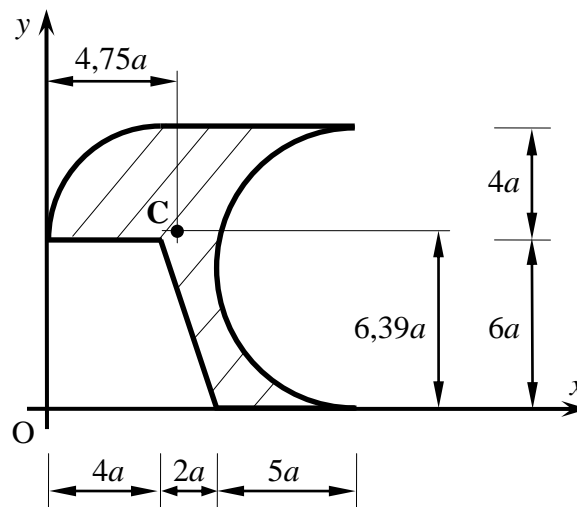


Fig. 7.14



**Prezentarea
rezultatelor și
modul de evaluare**

Cursantul trebuie să prezinte următoarele:

- împărțirea plăcii plane omogene într-un număr minim de plăci simple – 2p;
- alegerea sistemului de referință – 2p;
- determinarea corectă a ariilor și coordonatelor centrelor de greutate ale plăcilor simple – 2p;
- determinarea ariei și a momentelor statice ale plăcii plane în raport cu axele de coordonate – 1p;
- determinarea coordonatelor centrului de greutate al plăcii plane – 1p;
- reprezentarea centrului de greutate al plăcii plane – 1p.

La cele 9 puncte se adaugă 1 punct din oficiu.

Cursantul îndeplinește obiectivele acestui seminar dacă obține în urma evaluării 5 puncte.

Cursantul care obține rezultate eronate într-o etapă nu mai cumulează puncte din etapele ulterioare.