SEMINAR 8

STATICA PUNCTULUI MATERIAL

CUPRINS

8. Statica punctului material

Introducere seminar

În acest seminar se vor aplica condițiile de echilibru pentru un punct material liber, pentru un punct material cu legături ideale şi pentru un punct material cu legături cu frecare.

Aplicațiile studiate sunt aplicații în plan.

Obiective seminar

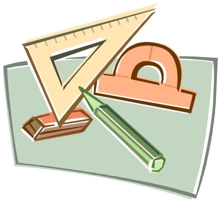
După parcurgerea acestui seminar cursantul va şti:

- să aplice condițiile de echilibru pentru un punct material liber;
- să aplice condițiile de echilibru pentru un punct material cu legături ideale;
- să aplice condițiile de echilibru pentru un punct material cu legături reale (cu frecare).

Durata medie de studiu individual

2 ore

Acest interval de timp presupune asimilarea noțiunilor prezentate în acest seminar şi realizarea aplicațiilor.



Cunoştinţe necesare

Cunoştinţele necesare studiului acestui seminar sunt:

- scrierea condiţiilor de echilibru scalare de tip ecuaţii de forţe (seminar 2, seminar 5, modul 7);
- scrierea condiţiilor de echilibru pentru un punct material liber (modul 7);
- scrierea condiţiilor de echilibru pentru un punct material cu legături ideale (modul 7);
- scrierea condiţiilor de echilibru pentru un punct material cu legături reale (modul 7).

8.1. Aspecte teoretice

Punctul material este unul dintre modelele utilizate de Mecanica teoretică pentru descrierea corpurilor reale. Prin punct material se schematizează corpurile cu dimensiunile neglijabile în raport cu dimensiunile problemei studiate sau corpurile pentru care nu interesează geometria în problema studiată.

Un punct material ce poate ocupa orice poziţie în spaţiu se numeşte punct material liber. Dacă punctul material nu poate ocupa orice poziţie în spaţiu datorită unor restricţii de natură geometrică (punctul material este obligat să se deplaseze pe o anumită suprafaţă, pe o curbă sau să rămână într-un anumit punct) atunci se va numi punct material cu legături.

Posibilităţile independente de mişcare ale punctului material se numesc grade de libertate. Punctul material liber are trei grade libertate în spaţiu şi două grade de libertate în plan.

Se spune despre un punct material că este în echilibru atunci când este acţionat de un sistem de forţe în echilibru.

Condiţiile scalare de echilibru pentru un punct material liber, în problema plană sunt:

$$\sum X_i = 0 \ , \sum Y_i = 0$$

unde X_i şi Y_i sunt proiecţiile forţelor active pe două axe (de regulă orizontală, respectiv verticală).

Condiţiile scalare de echilibru pentru un punct material cu legături ideale, în problema plană sunt:

$$\sum X_{di} + \sum X_{lj} = 0$$
$$\sum Y_{di} + \sum Y_{lj} = 0$$

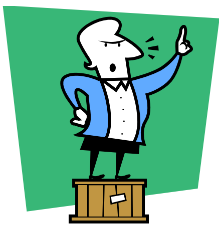
unde X_{di} şi Y_{di} sunt proiecțiile forțelor active pe două axe (de regulă orizontală, respectiv verticală) iar X_{li} şi Y_{li} sunt proiecțiile forțelor de legătură pe aceleaşi axe.

Condițiile scalare de echilibru pentru un punct material cu legături reale, în problema plană sunt:

$$\sum X_{di} + \sum X_{lj} = 0$$
$$\sum Y_{di} + \sum Y_{lj} = 0$$
$$T_k \leq \mu_k \cdot N_k\,,\ \ k = 1{,}2$$

unde T_k este forța de frecare „k”, μ_k este coeficientul de frecare „k” (adimensional) iar N_k este apăsarea normală „k” pe suprafața de contact.

8.2. Aplicații rezolvate



Enunț general

Se disting trei tipuri de probleme:

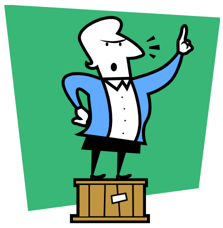
a) problema directă – fiind dat un punct material liber acționat de un sistem de forțe concurente se cere determinarea poziției de echilibru a acestuia;

b) se cunoaşte poziția de echilibru a punctului material şi se cere determinarea sistemului de forțe care determină punctul să ocupe acea poziție;

c) se cunosc o parte din parametrii de poziție ce definesc poziția de echilibru şi o parte din forțele ce acționează asupra punctului material şi se cere determinarea celorlalte forțe şi a parametrilor de poziție necunoscuți pentru acea poziție de echilibru a punctului material considerat.

Etape de rezolvare

Etapele de rezolvare se vor observa în cadrul fiecărui exemplu considerat.



Enunț

APLICAȚIA 1

Un punct material M de greutate G se suspendă prin intermediul a două fire ideale petrecute peste doi scripeți punctuali fără frecare de alte două greutăți P şi Q (figura 8.1). Cunoscând poziția celor doi scripeți şi faptul că echilibrul punctului M se realizează în plan vertical, să se determine poziția de echilibru a punctului.

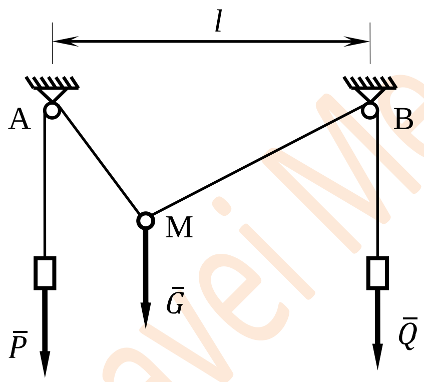


Fig. 8.1

Rezolvare:

Punctul M poate ocupa orice poziție în spațiu, deci este un punct material liber. Problema este una directă. Poziția punctului este cunoscută dacă se determină unghiurile făcute de firele ideale cu o dreaptă de direcție oarecare (de exemplu orizontala ce trece prin punctul M) [1].

Etape de rezolvare:

1) Se alege un sistem de referință fix.

Sistemul de referință fix *x*A*y* este reprezentat în figura 8.2.a.

2) Se realizează schema statica în modul următor (figura 8.2.b):

- se izolează punctul material;
- se încarcă punctul material cu forțele active.

Obs. Deoarece firele sunt ideale şi scripeţii sunt punctuali şi fără frecare, aceste fire transmit punctului M forţele $\bar{P}$ şi $\bar{Q}$ aşa cum sunt ele, în aşa fel încât firele să fie mereu întinse.

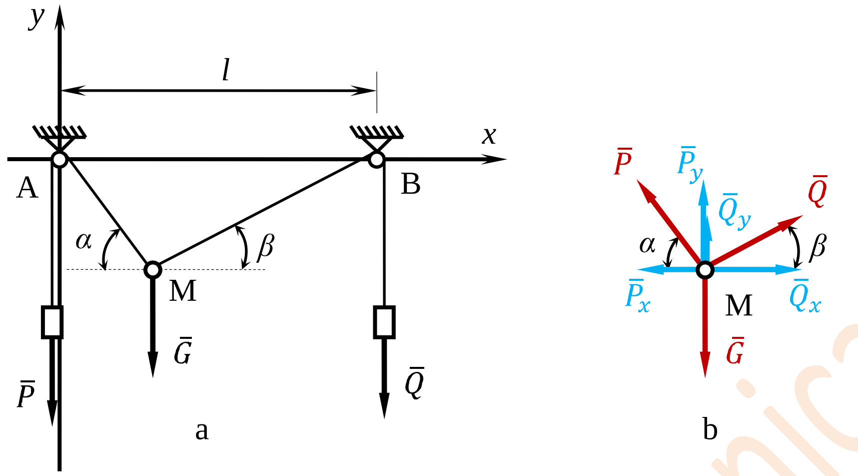


Fig. 8.2

3) Scrierea condiţiilor de echilibru.

Condiţiile de echilibru sunt ecuaţii de proiecţii de forţe scrise pe direcţiile orizontală şi verticală:

$$\sum X_i = 0 : \ -P_x + Q_x = 0$$
$$\sum Y_i = 0 : \ P_y + Q_y - G = 0$$

Ecuaţiile de echilibru devin:

$$\sum X_i = 0 : \ -P \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta = 0$$
$$\sum Y_i = 0 : \ P \cdot \sin\alpha + Q \cdot \sin\beta - G = 0$$

4) Rezolvarea ecuaţiilor de echilibru.

Se elimină necunocuta α din ecuaţiile de echilibru astfel:

$$\cos\alpha = \frac{Q}{P} \cdot \cos\beta$$
$$\sin\alpha = -\frac{Q}{P} \cdot \sin\beta + \frac{G}{P}$$

Se ridică ambele ecuaţii la pătrat şi se adună.

$$1 = \frac{Q^2}{P^2} \cdot (sin^2\beta + cos^2\beta) + \frac{G^2}{P^2} - \frac{2 \cdot G \cdot Q}{P^2} \cdot \sin\beta$$

Rezultă

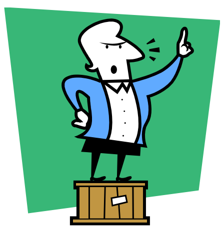
$$\sin \beta = \frac{-P^2 + Q^2 + G^2}{2 \cdot G \cdot Q}$$

Analog, eliminând necunoscuta β din ecuațiile de echilibru, rezultă

$$\sin \alpha = \frac{-Q^2 + P^2 + G^2}{2 \cdot G \cdot P}$$

Echilibrul nu este posibil decât pentru valori ale funcției sinus în intervalul $(0,1)$. Rezultă condițiile:

$$G < P + Q$$
$$G > Q - P$$
$$G > P - Q$$



Enunț

APLICAȚIA 2

O bară AM având posibilitatea de a se roti în jurul extremității A, se menține în poziție verticală sub acțiunea unei forțe orizontale $F = 100\ daN$ ce acționează în punctul M datorită unui cablu ce se ancorează în punctele B şi M. Cunoscând lungimea barei şi poziția punctului B să se determine forțele care iau naştere în bară şi cablu [1].

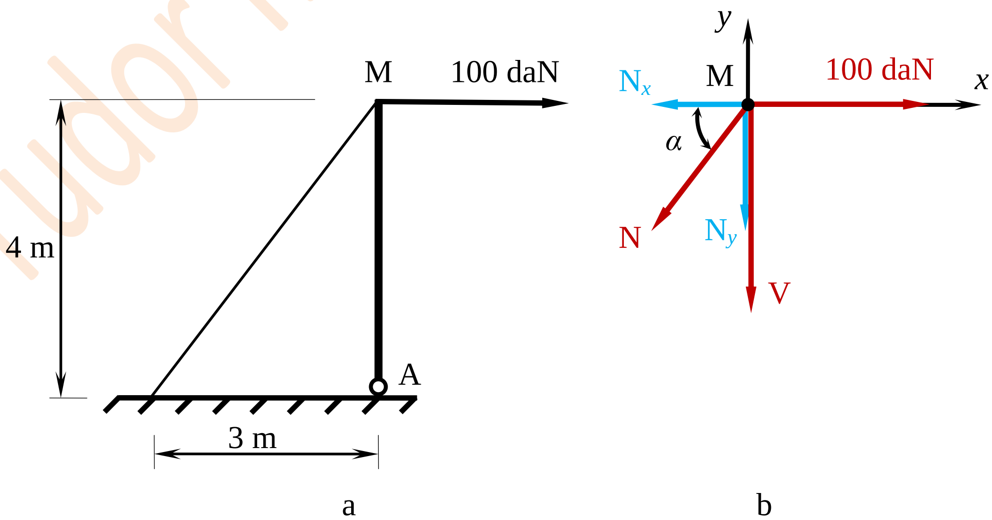


Fig. 8.3

Rezolvare

Punctul M este imobilizat prin cele două legături (bara AM şi firul ideal). Legăturile sunt ideale.

Etape

1) Alegerea sistemului de referinţă

Se alege sistemul de referinţă *x*M*y* (figura 8.3.b).

2) Se realizează schema statică (figura 8.3.b)

- se izolează punctul material;
- se evidenţiază atât forţele active, cât şi reacţiunile introduse de legăturile punctului material.

Obs. Direcţiile reacţiunilor sunt cunoscute (figura 8.3.b). Astfel, reacţiunea $\bar{N}$ are direcţia firului iar reacţiunea $\bar{V}$ direcţia barei AM. Cum firul nu funcţionează decât întins (este o legătură unilateră), sensul reacţiunii $\bar{N}$ nu poate fi decât cel din figura 8.3.b. Sensul reacţiunii $\bar{V}$ poate fi oricum (bara AM reprezintă o legătură bilateră). Pentru această reacţiune se alege un sens (arbitrar) iar la sfârşit se va verifica dacă sensul ales este cel corect (semnul „+" al mărimii determinate pentru reacţiunea $\bar{V}$ ne confirmă că sensul ales iniţial pentru această reacşiune este cel corect).

3) Scrierea condiţiilor de echilibru

Condiţiile de echilibru sunt ecuaţii de proiecţii de forţe scrise pe direcţiile orizontală şi verticală:

$$\sum X_i = 0 :\ 100 - N_x = 0$$

$$\sum Y_i = 0 :\ -N_y - V = 0$$

Ecuaţiile de echilibru devin:

$$\sum X_i = 0 :\ 100 - N \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\sum Y_i = 0 :\ -N \cdot \sin\alpha - V = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = 0{,}80\ , \qquad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = 0{,}60$$

4) Rezolvarea sistemului ecuațiilor de echilibru.

Din prima ecuație rezultă:

$$N = \frac{100}{\cos\alpha} = \frac{100}{0{,}6} = 166{,}67\ daN$$

Înlocuind în cea de-a doua ecuație:

$$V = -N \cdot \sin\alpha = -166{,}67 \cdot 0{,}8 = -133{,}33\ daN$$

Semnul „-” arată că sensul ales inițial pentru reacțiunea $\bar{V}$ nu este cel corect.

5) Rezultatele se trec în schema rezultatelor (figura 8.4)

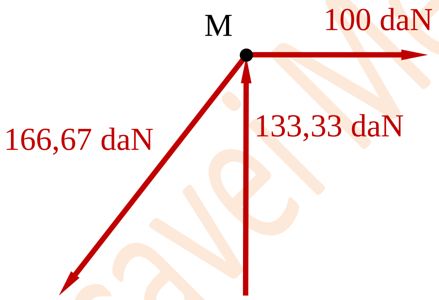


Fig. 8.4

Prezentarea rezultatelor şi modul de evaluare

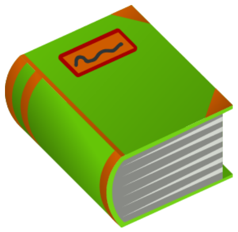
Cursantul trebuie să prezinte următoarele:

- alegerea sistemului de referință – 1p;
- realizarea corectă a schemei statice – 2p;
- scrierea ecuațiilor de echilibru – 2p;
- rezolvarea ecuațiilor de echilibru – 2p;
- reprezentarea rezultatelor şi/sau eventuale comentarii – 2p.

La cele 9 puncte se adaugă 1 punct din oficiu.

Cursantul îndeplineşte obiectivele acestui seminar dacă obține în urma evaluării 5 puncte.

Cursantul care obține rezultate eronate într-o etapă nu mai cumulează puncte din etapele ulterioare.



Bibliografie modul

[1]. Szolga, V., Szolga, A. M., „Mecanica Teoretică. Note de curs şi îndrumător de seminar. Partea I”, Editura Conspress, Bucureşti, 2003, pag. 88, 95.