

SEMINAR 13**GRINZI CU ZĂBRELE – METODA IZOLĂRII NODURILOR****CUPRINS**

13. Grinzi cu zăbrele – Metoda izolării nodurilor1
Cuprins1
Introducere1
13.1. Aspecte teoretice2
13.2. Aplicații rezolvate4

13. Grinzi cu zăbrele – Metoda izolării nodurilor**Introducere
seminar**

În acest seminar se vor determina eforturile din barele unei grinzi cu zăbrele plană, simplă și static determinată utilizând metoda izolării nodurilor.

Aplicațiile studiate sunt aplicații în plan.

**Obiective seminar**

După parcurgerea acestui seminar cursantul va ști:

- să identifice o grindă cu zăbrele static determinată;
- să determine reacțiunile unei grinzi cu zăbrele static determinată;
- să identifice nodurile cu încărcare particulară;
- să determine eforturile din barele unei grinzi cu zăbrele utilizând metoda izolării nodurilor.

**Durata medie de
studiu individual**

2 ore

Acest interval de timp presupune asimilarea noțiunilor prezentate în acest seminar și realizarea aplicațiilor.



Cunoștințe necesare

Cunoștințele necesare studiului acestui seminar sunt:

- scrierea condițiilor de echilibru scalare de tip ecuații de forțe (seminar 2, seminar 5, modul 7);
- metoda izolării nodurilor (modul 12).

13.1. Aspecte teoretice

Se vor determina eforturile în barele unei grinzi cu zăbrele plană, simplă și static determinată.

Pentru ca un sistem de corpuri să fie static determinat trebuie să fie îndeplinite două condiții: una cantitativă și una calitativă.

Condiția cantitativă pentru o grindă cu zăbrele este:

$$2 \cdot n = b + 3$$

unde n este numărul de noduri iar b este numărul barelor grinzii cu zăbrele.

Pentru o grindă cu zăbrele simplă este suficient ca aceasta să fie invariabilă din punct de vedere geometric (aceasta se rezolvă prin alcătuirea grinzii cu zăbrele prin alăturare de triunghiuri).

Datorită ipotezelor simplificatoare, în barele unei grinzi cu zăbrele se dezvoltă doar eforturi axiale (de întindere sau de compresiune), constante pe lungimea barelor.

Fie bara mărginită de nodurile „ i ” și „ j ” (figura 13.1). Se observă că dacă bara este întinsă, efortul axial iese din nod, iar dacă bara este comprimată efortul axial intră în nod.

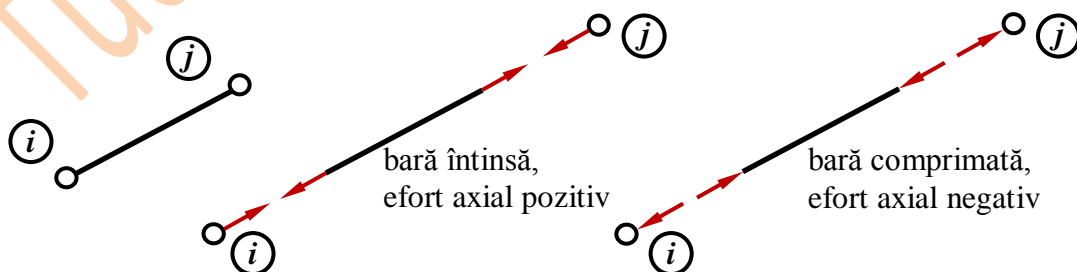


Fig. 13.1 Convenția de semn pentru efortul axial

Pe schema rezultatelor, eforturile se reprezintă în raport cu nodurile grinzii cu zăbrele.

În anumite situații de încărcare se poate determina efortul dintr-o bară a unei grinzi cu zăbrele fără a mai efectua calculul propriu-zis (noduri aflate în situații particulare). Aceste situații sunt:

- nod cu două bare, neîncărcat (figura 13.2.a) – ambele bare sunt de efort nul (efortul din bare este zero);
- nod cu două bare, încărcat pe direcția uneia dintre ele (figura 13.2.b) – în bara coliniară cu forța efortul este egal în mărime cu forța și produce același efect asupra nodului iar în cealaltă bară efortul este zero;
- nod cu trei bare neîncărcat, două bare fiind în prelungire (figura 13.2.c) – în barele aflate în prelungire eforturile au aceeași mărime, cu același efect asupra nodului iar în cea de-a treia efortul este zero;
- nod cu două bare, încărcat pe direcția barelor (figura 13.2.d) – eforturile din bare sunt egale în mărime cu cele două forțe, cu același efect asupra nodului;
- nod cu trei bare, două bare în prelungire și încărcat pe direcția celei de-a treia (figura 13.2.e) – în barele aflate în prelungire eforturile sunt egale, cu același efect asupra nodului iar în cea de-a treia bară efortul este egal cu forța activă, cu același efect asupra nodului;
- nod cu patru bare neîncărcat, două câte două bare în prelungire (figura 13.2.f) – două câte două eforturile sunt egale, cu același efect asupra nodului;

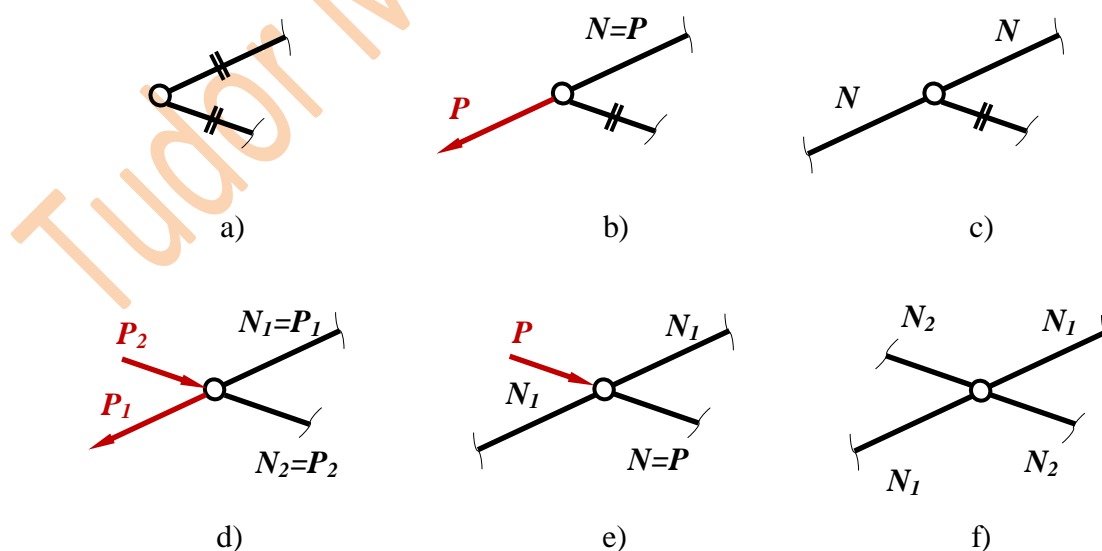
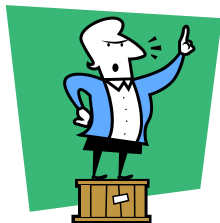


Fig. 13.2. Noduri încărcate particulare

Barele de efort nul se pot considera inexistente în calculul stării de eforturi a unei grinzi cu zăbrele.

13.2. Aplicații rezolvate



Enunț general



Etape de rezolvare

Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figură utilizând metoda izolării nodurilor.

- 1) Se verifică dacă grinda cu zăbrele este static determinată;
- 2) Se numerotează nodurile și se determină cosinuşii directori ai barelor înclinate;
- 3) Se determină reacţiunile grinzii cu zăbrele;
- 4) Se identifică nodurile cu încărcare particulară și se determină eforturile din barele aferente acestora (după caz);
- 5) Se identifică un nod cu două bare de efort necunoscut; acesta se izolează și se încarcă cu forțele exterioare (cunoscute) și cu eforturile (necunoscute) corespunzătoare celor două bare; inițial, sensul acestor eforturi necunoscute se alege de întindere (eforturile ies de nod) astfel încât să se respecte convenția de semn („+” pentru întindere, „-” pentru compresiune);
- 6) Se scriu două ecuații de echilibru scalare:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{cases}$$

- 7) Se rezolvă sistemul de ecuații, iar rezultatele se trec pe schema rezultatelor; eforturile se reprezintă pe schema rezultatelor în raport cu nodurile grinzii cu zăbrele (efortul de întindere iese din noduri, efortul de compresiune intră în noduri);
- 8) Se caută alt nod cu două bare de efort necunoscut, se izolează și se încarcă cu forțele exterioare (cunoscute) și cu eforturile (două necunoscute, alese inițial a fi de întindere, iar celelalte cunoscute) din barele suprimate;
- 9) Se reiau etapele 5, 6 și 7 până când se epuizează toate

necunoscutele;

10) Ultimele două noduri ale grinzii cu zăbrele oferă trei ecuații de verificare.



Enunț

APLICAȚIA 1

Pentru grinda cu zăbrele din figura 13.3 să se determine eforturile din bare utilizând metoda izolării nodurilor.

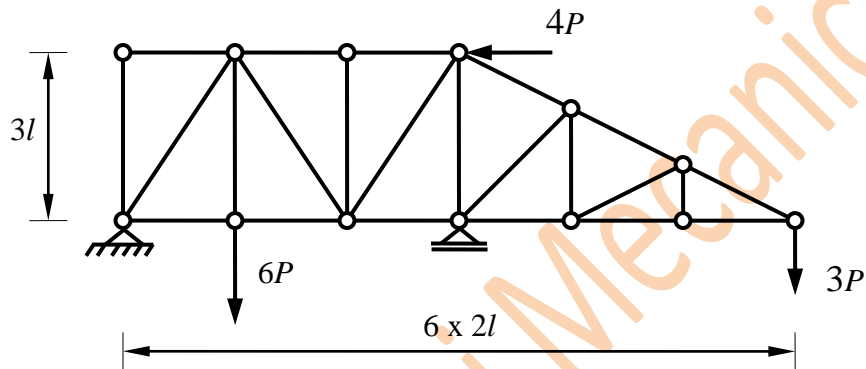


Fig. 13.3

1) Se verifică dacă grinda cu zăbrele este static determinată.

Condiția de determinare statică:

$$2 \cdot n = b + 3$$

$$2 \cdot 13 = 23 + 3$$

$$26 = 26$$

Grinda cu zăbrele din figură este alcătuită prin alăturare de triunghiuri, rezultă că este static determinată.

2) Se numerotează nodurile (figura 13.4) și se determină cosinuzii directori ai barelor înclinate

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{3l}{\sqrt{(2l)^2 + (3l)^2}} = 0,832 \\ \cos \alpha = \frac{2l}{\sqrt{(2l)^2 + (3l)^2}} = 0,555 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \beta = \frac{2l}{\sqrt{(2l)^2 + (2l)^2}} = 0,707 \\ \cos \beta = \frac{2l}{\sqrt{(2l)^2 + (2l)^2}} = 0,707 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \gamma = \frac{l}{\sqrt{(2l)^2 + l^2}} = 0,447 \\ \cos \gamma = \frac{2l}{\sqrt{(2l)^2 + l^2}} = 0,894 \end{cases}$$

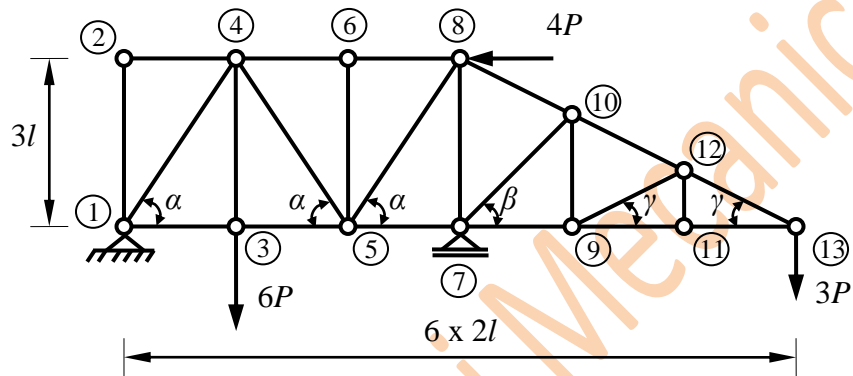


Fig. 13.4

3) Determinarea reacțiilor grinzii cu zăbrele

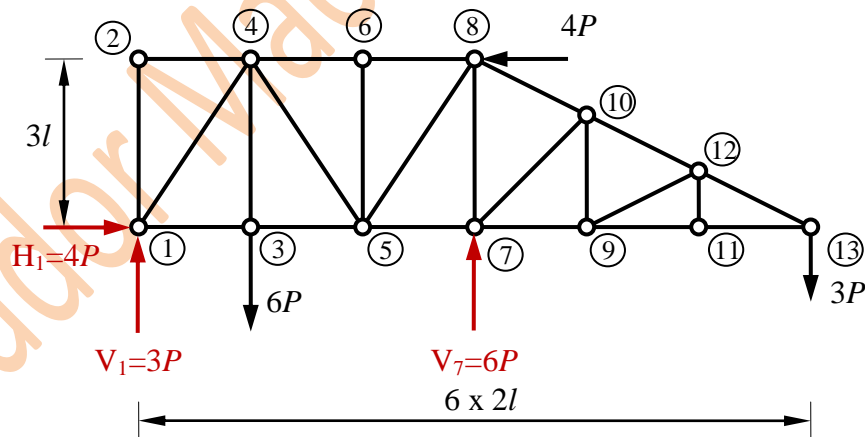


Fig. 13.5

$$\sum X_i = 0: H_1 - 4P = 0$$

$$\sum M_1 = 0: 4P \cdot 3l - 6P \cdot 2l + V_7 \cdot 6l - 3P \cdot 12l = 0$$

$$\sum M_7 = 0: 4P \cdot 3l - V_1 \cdot 6l + 6P \cdot 4l - 3P \cdot 6l = 0$$

Rezultă:

$$H_1 = 4P, \quad V_1 = 3P, \quad V_7 = 6P$$

Verificare:

$$\sum Y_i = 0: V_1 - 6P + V_2 - 3P = 3P - 6P + 6P - 3P = 0$$

4) Se identifică nodurile cu încărcare particulară și se determină eforturile din barele aferente acestora (după caz)

Nodul 2 este un nod cu două bare neîncărcat. Rezultă că barele 1-2 și 2-4 sunt bare de efort nul (figura 13.6).

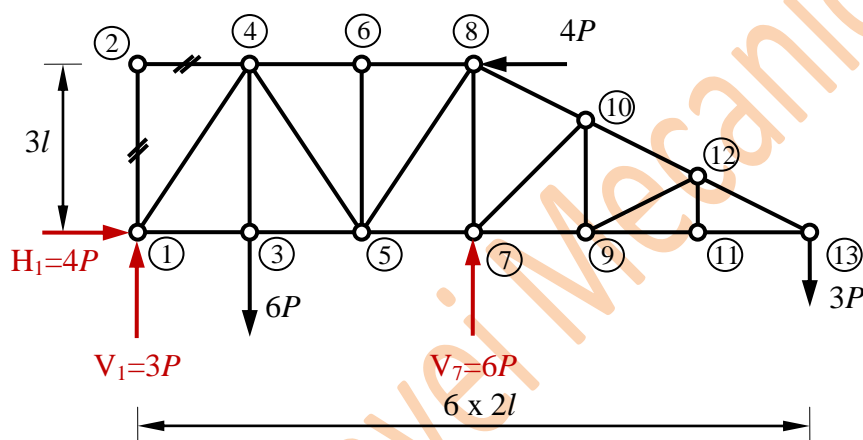


Fig. 13.6

Nodul 3 este un nod cu trei bare, două bare în prelungire și încărcat pe direcția celei de-a treia – în barele 1-3 și 3-5 eforturile sunt egale cu același efect asupra nodului iar în bara 3-4 efortul este egal $6P$, întindere (figura 13.7).

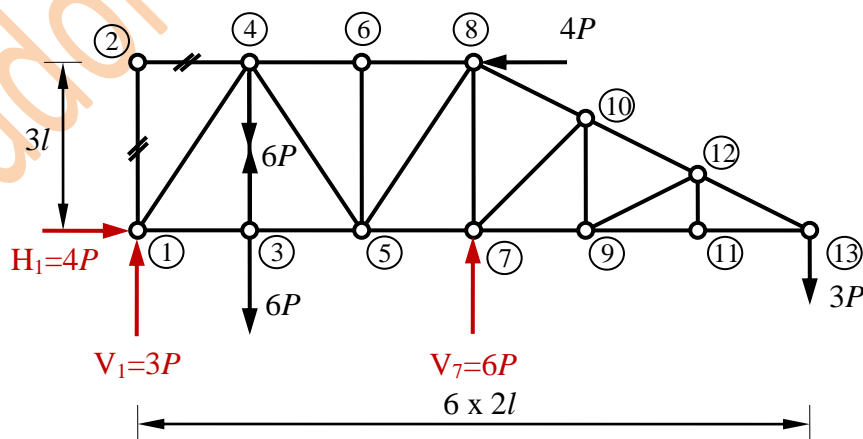


Fig. 13.7

Nodurile 6 și 11 sunt noduri nod cu trei bare neîncărcate, două bare fiind în prelungire (figura 13.8) – în barele aflate în prelungire (4-6 și 6-8, respectiv 9-11 și 11-13) eforturile au aceeași mărime, cu același efect asupra nodului iar în barele 5-6, respectiv 11-12 efortul este zero.

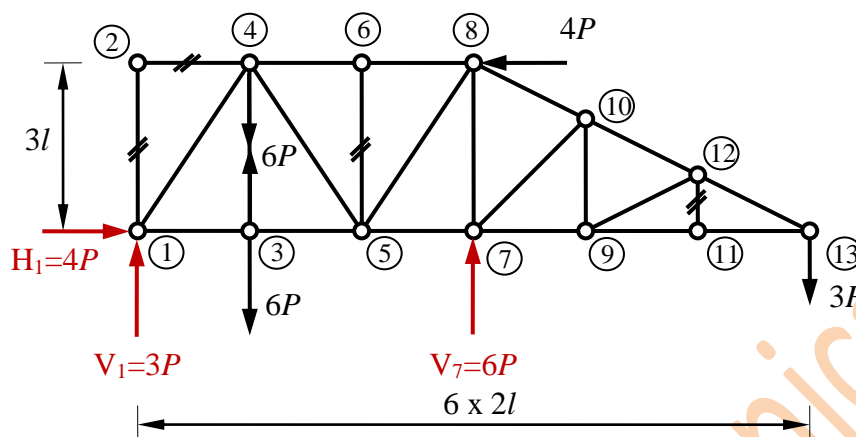


Fig. 13.8

Dacă bara 11-12 este de efort nul, din punct de vedere al calculului eforturilor aceasta nu există. Consecința este că nodul 12 devine un nod cu trei bare neîncărcat, două bare fiind în prelungire, deci bara 9-12 are efortul zero, iar în barele 10-12 și 12-13 eforturile sunt egale, cu același efect asupra nodului 12 (figura 13.9).

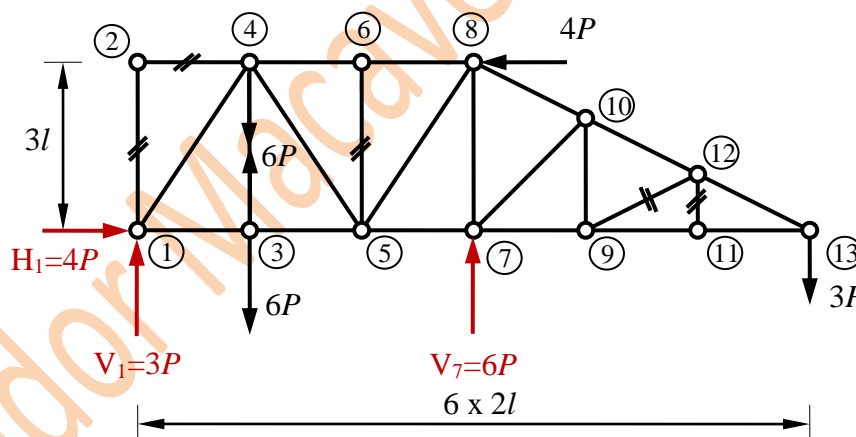


Fig. 13.9

În același mod, nodul 9 devine un nod cu trei bare neîncărcat cu două bare în prelungire, deci bara 9-10 este de efort nul, iar în barele 7-9 și 9-11 eforturile sunt egale, cu același efect asupra nodului 9. Dacă bara 9-10 este de efort nul, atunci nodul 10 devine nod cu trei bare neîncărcat cu două bare în prelungire (eforturile în barele 8-10 și 10-12 sunt egale, cu același efect asupra nodului 10, iar bara 7-10 are efortul zero). Rezultă situația din figura 13.10:

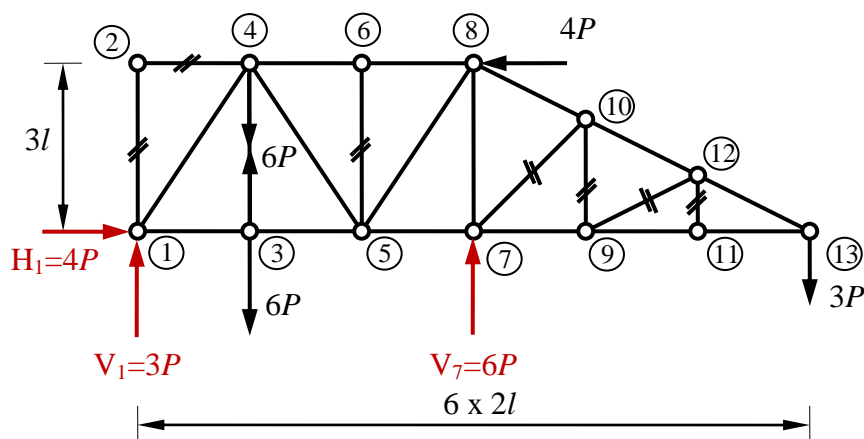


Fig. 13.10

În acest moment nodul 7 este un nod cu trei bare, două bare în prelungire și încărcat pe direcția celei de-a treia. Rezultă că eforturile din barele 5-7 și 7-9 sunt egale, cu același efect asupra nodului 7 iar efortul în bara 7-8 este de $6P$, compresiune (figura 13.11).

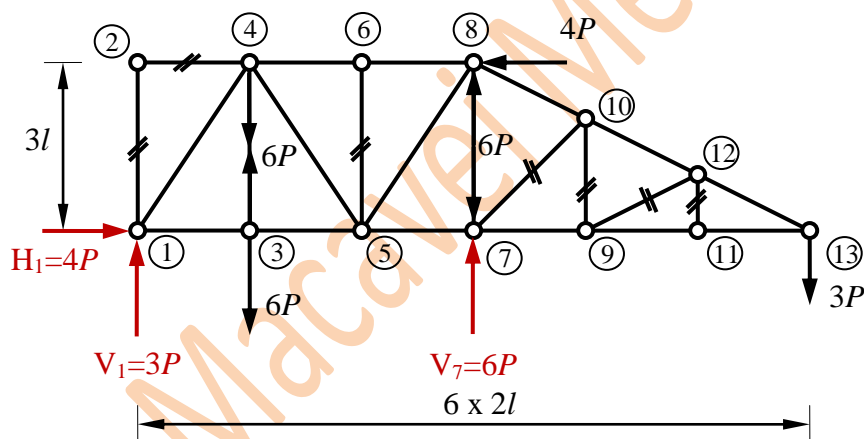


Fig. 13.10

Etapele 5, 6 și 7 se tratează împreună. Acestea sunt:

5) Se identifică un nod cu două bare de efort necunoscut; acesta se izolează și se încarcă cu forțele exterioare (cunoscute) și cu eforturile (necunoscute) corespunzătoare celor două bare; inițial, sensul acestor eforturi necunoscute se alege de întindere (eforturile ies de nod) astfel încât să se respecte convenția de semn („+” pentru întindere, „-” pentru compresiune);

6) Se scriu două ecuații de echilibru scalare:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{cases}$$

7) Se rezolvă sistemul de ecuații, iar rezultatele se trec pe schema rezultatelor; eforturile se reprezintă pe schema rezultatelor în raport cu nodurile grinzii cu zăbrele (efortul de întindere iese din noduri, efortul de compresiune intră în noduri).

Din câte se poate observa, sunt două noduri cu două bare de efort necunoscut (nodurile aflate în situații particulare se exclud). Acestea sunt nodurile 1 și 13. Se va izola nodul 1 (figura 13.11).

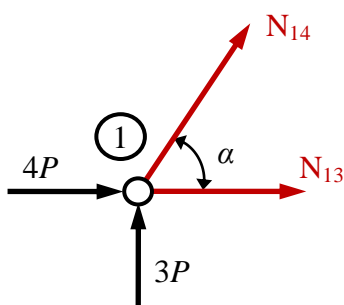


Fig. 13.11

$$\begin{cases} \sum X_i = 0: N_{13} + N_{14} \cdot \cos \alpha + 4P = 0 \\ \sum Y_i = 0: N_{14} \cdot \sin \alpha + 3P = 0 \end{cases}$$

$$N_{14} = -\frac{3P}{\sin \alpha} = -\frac{3P}{0,832} = -3,61P$$

$$N_{13} = -4P - (-3,61P) \cdot 0,555 = -2P$$

Se observă că ambele eforturi sunt de compresiune. Rezultatele obținute se trec în schema rezultatelor (figura 13.12). În figura 13.2 s-a trecut și efortul din bara 3-5, așa cum reiese din etapa numărul 4.

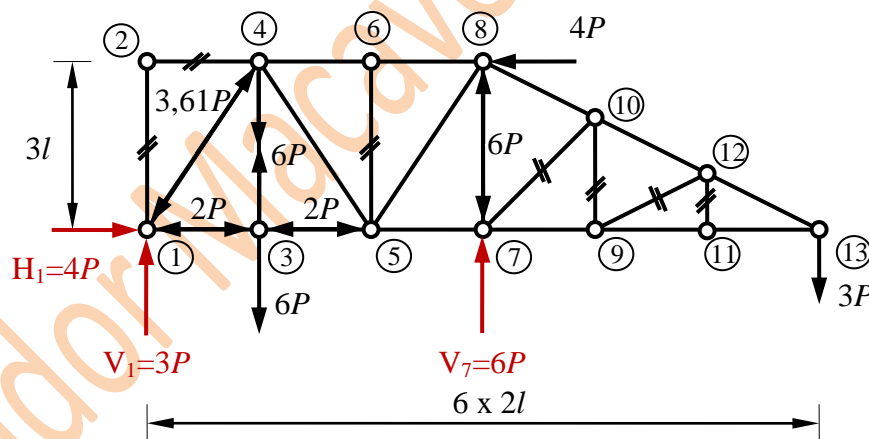


Fig. 13.12

Se izolează nodul 4:

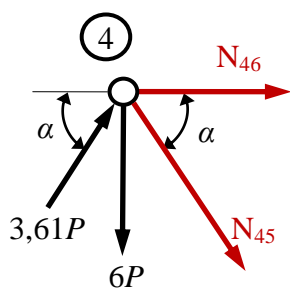


Fig. 13.13

$$\begin{cases} \sum X_i = 0: N_{46} + N_{45} \cdot \cos \alpha + 3,61P \cdot \cos \alpha = 0 \\ \sum Y_i = 0: -N_{45} \cdot \sin \alpha - 6P + 3,61P \cdot \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$N_{45} = -\frac{6P - 3,61P \cdot 0,832}{\sin \alpha} = -\frac{3P}{0,832} = -3,61P$$

$$N_{46} = -(-3,61P) \cdot 0,555 - 3,61P \cdot 0,555 = 0$$

Rezultatele obținute se trec în schema rezultatelor (figura 13.14). În figura 13.4 s-a trecut și efortul din bara 6-8, așa cum reiese din etapa numărul 4.

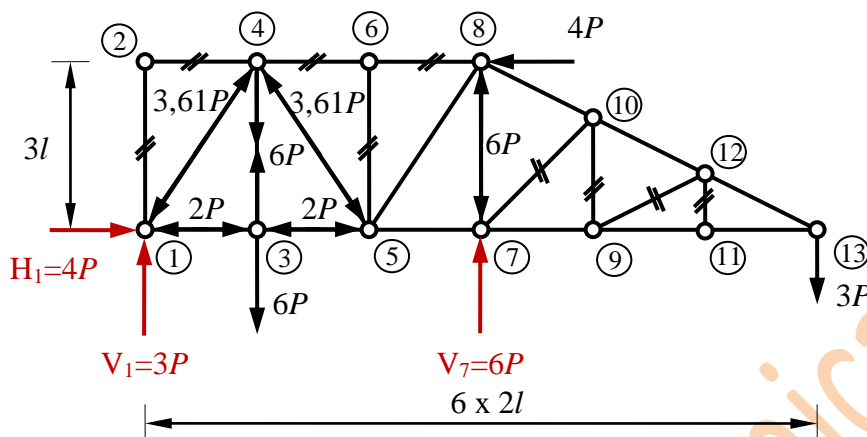


Fig. 13.14

Se izolează nodul 5:

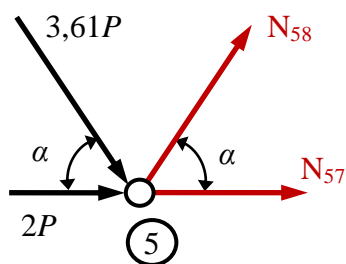


Fig. 13.15

$$\begin{cases} \sum X_i = 0: N_{57} + N_{58} \cdot \cos \alpha + 3,61P \cdot \cos \alpha + 2P = 0 \\ \sum Y_i = 0: N_{58} \cdot \sin \alpha - 3,61P \cdot \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$N_{58} = \frac{3,61P \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = +3,61P$$

$$N_{57} = (-3,61P - 3,61P) \cdot 0,555 - 2P = -6P$$

Rezultatele obținute se trec în schema rezultatelor (figura 13.16). În figura 13.6 s-au trecut și eforturile din barele 7-9, 9-11 și 11-13 așa cum reies din etapa numărul 4.

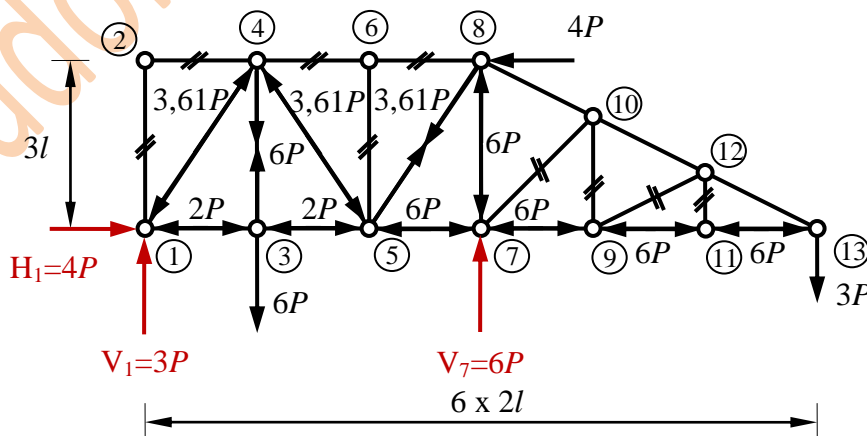
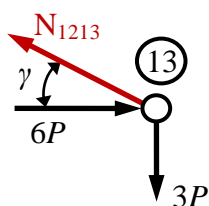


Fig. 13.16

Se izolează nodul 13:



$$\sum X_i = 0: 6P - N_{1213} \cdot \cos \gamma = 0$$

$$N_{1213} = \frac{6P}{0,894} = +6,71P$$

Fig. 13.17

$$\text{Verificare: } \sum Y_i = 0: -3P + N_{1213} \cdot \sin \gamma = -3P + 6,71P \cdot 0,447 = 0$$

Rezultatul obținut se trece în schema rezultatelor (figura 13.18). În figura 13.18 s-au trecut și eforturile din barele 10-12 și 8-10 așa cum reies din etapa numărul 4.

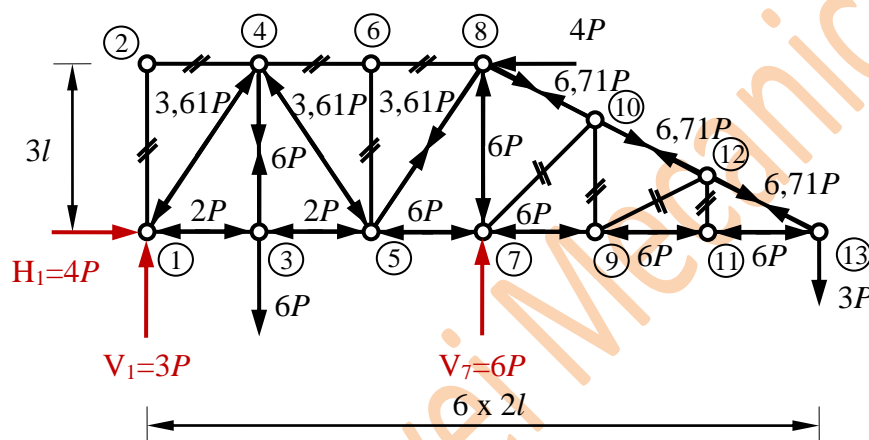


Fig. 13.18

Se verifică rezultatele exprimând echilibrul nodului 8.

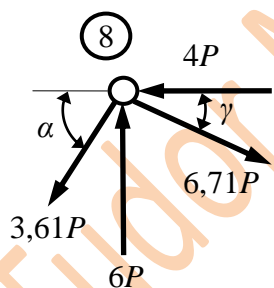


Fig. 13.19

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X_i = 0: -3,61P \cdot \cos \alpha + 6,71P \cdot \cos \gamma - 4P = 0 \\ \sum Y_i = 0: 6P - 6,71P \cdot \sin \gamma - 3,61P \cdot \sin \alpha = 0 \end{array} \right.$$

Deoarece rezultatele obținute se verifică, schema rezultatelor este redată de figura 13.18.



**Prezentarea
rezultatelor și
modul de evaluare**

Cursantul trebuie să prezinte următoarele:

- verificarea grinzii cu zăbrele (dacă este static determinată) – 1p;
- determinarea reacțiunilor – 1p;
- identificarea tuturor nodurilor aflate în situații particulare – 1p;
- determinarea corectă a eforturilor din barele grinzii cu zăbrele – 4p (punctele se împart la numărul de noduri izolate; se consideră doar nodurile pentru care s-au determinat corect eforturile necunoscute aferente);
- verificarea rezultatelor – 1p;
- schema corectă a rezultatelor – 1p.

La cele 9 puncte se adaugă 1 punct din oficiu.

Cursantul îndeplinește obiectivele acestui seminar dacă obține în urma evaluării 5 puncte.

Tudor Macavei Mecanica