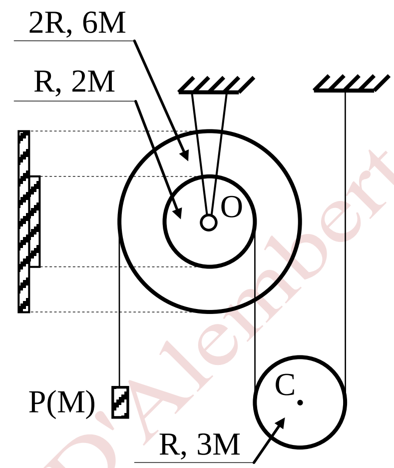
Utilizarea principiului lui D'Alembert

Sistemul de corpuri din figură se mişcă în plan vertical sub acțiunea greutăților proprii, fiind inițial în repaus. Cunoscând că firele sunt ideale, rămân verticale tot timpul mişcării şi nu există lunecare între fire şi discuri să se determine accelerația punctului P şi tensiunile din fire.



REZOLVARE

1. Determinarea numărului gradelor de libertate şi alegerea parametrilor cinematici scalari independenți ce definesc mişcarea

Determinarea numărului gradelor de libertate se poate face în două moduri:

a) Se aplică formula:

$$N_{gl} = 3 \cdot N_c + 2 \cdot N_{pm} - (3 \cdot N_{î} + 2 \cdot N_{as} + 1 \cdot N_{rs} + N_r), \text{ unde}$$

N_c este numărul de corpuri, N_{pm} este numărul punctelor materiale, $N_{î}$ este numărul încastrărilor, N_{as} este numărul articulațiilor simple, N_{rs} este numărul reazemelor simple şi N_r este numărul restricțiilor de natură geometrică. Sistemul de corpuri este alcătuit din două corpuri (scripetele fix cu centrul în O şi scripetele mobil cu centrul în C) şi un punct material (punctul P). Sistemul de corpuri are ca legături o articulație simplă (în punctul O) şi trei legături simple (firele). Din condiția ca firele să rămână verticale tot timpul mişcării rezultă două restricții: punctul P şi scripetele mobil nu se pot mişca pe direcție orizontală. Astfel:

$$N_{gl} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - (3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2) = 1$$

b) Se introduc legături simple până când sistemul de corpuri este imobilizat. Numărul gradelor de libertate va fi egal cu numărul legăturilor simple introduse pentru imobilizarea sistemului de corpuri.

Introducem o legătură simplă ce suprimă rotația scripetelui fix. Deoarece nu există lunecare între fire şi disc, acestea nu îşi pot modifica lungimea. Rezultă că punctul P nu se poate deplasa pe verticală. Cum firul rămâne vertical tot timpul mişcării, punctul P nu se poate deplasa nici pe orizontală, deci punctul P este fix. Scripetele mobil nu se poate translata nici pe orizontală (firele rămân verticale) dar nici pe verticală (firul nu-şi modifică lungimea). Mişcarea de rotație nu este posibilă deoarece nu există lunecare între disc şi fir, deci şi scripetele mobil este fixat. Rezultă că sistemul de corpuri are un singur grad de libertate (acesta a fost imobilizat prin introducerea unei singure legături simple).

Deoarece sistemul de corpuri are un grad de libertate, avem nevoie de un singur parametru cinematic scalar pentru a defini mişcarea sistemului de corpuri. Alegem acest parametru rotirea scripetelui fix în raport cu poziția sa inițială, $\theta = \theta(t)$ (figura 1). Sensul acestui parametru este ales arbitrar (presupunem aici sensul de rotație al scripetelui fix antiorar). Elementele mişcării tuturor corpurilor şi punctelor materiale vor fi exprimate în funcție de acest parametru.

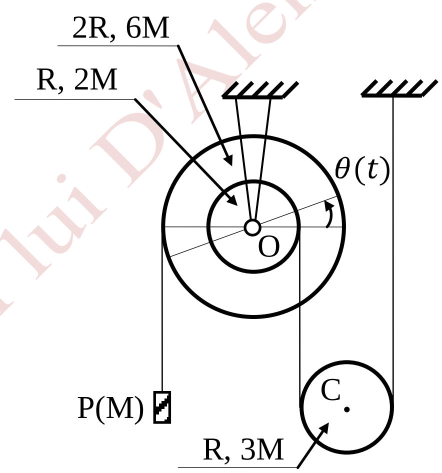


Fig. 1

2. Studiul cinematic

Se exprimă în funcție de parametrul ales elementele mişcării fiecărui corp şi punct material în parte. În problema plană ne interesează:

- accelerația unui punct material;
- accelerația unui punct oarecare al unui corp ce efectuează mişcare de translație;
- accelerația unghiulară a unui corp ce efectuează mişcare de rotație;
- accelerația unghiulară şi accelerația centrului de masă pentru un corp ce efectuează mişcare plan paralelă.

Începem studiul cinematic cu scripetele fix (discul cu centrul în O) deoarece parametrul ales caracterizează în mod direct mişcarea acestuia. Scripetele fix efectuează o mişcare de rotație în jurul lui O. Viteza unghiulară a acestuia se determină derivând o dată în raport cu timpul parametrul cinematic unghiular θ. Direcția vitezei unghiulare $\overline{\omega}_O$ (indicele O arată că este vorba despre viteza unghiulară a discului cu centrul în O) este perpendiculară pe planul mişcării, iar sensul reprezentării acesteia este acelaşi cu sensul de variație al parametrului θ, deoarece prin derivare semnul nu se modifică:

$$\omega_O = \dot{\theta}$$

Accelerația unghiulară a scripetelui fix, $\bar{\varepsilon}_O$, se determină derivând o dată în raport cu timpul viteza unghiulară $\bar{\omega}_O$. Direcția acesteia este perpendiculară pe planul mişcării, iar sensul este acelaşi cu sensul vitezei unghiulare (prin derivare semnul nu se modifică):

$$\varepsilon_O = \dot{\omega}_O = \ddot{\theta}$$

Rezultatele se reprezintă pe schema cinematică (fig. 2.a).

Mişcarea se va transmite de la scripetele fix către punctul material P şi scripetele mobil (discul cu centrul în C) prin intermediul firelor. Se notează punctele de tangență ale firelor cu discurile cu A, B respectiv D (fig. 2.b). Deoarece nu există lunecare între discuri şi fire, în aceste puncte de tangență vitezele discurilor şi firelor sunt identice. Deoarece firele sunt inextensibile şi rămân verticale tot timpul mişcării vitezele punctelor de pe un fir sunt vectori echipolenți.

Punctul material P are o mişcare rectilinie pe verticală, iar viteza lui este egală cu viteza punctului A. Viteza punctului A se determină din mişcarea scripetelui fix:

$$v_A = OA \cdot \omega_O = 2R\dot{\theta}$$

Rezultă: $$v_P = 2R\dot{\theta}$$

Deoarece punctul P are o mişcare rectilinie, accelerația sa va avea direcția vitezei, iar mărimea acesteia este derivata de ordinul unu în raport cu timpul a mărimii vitezei:

$$a_P = \dot{v}_P = 2R\ddot{\theta}$$

Deoarece în urma derivării semnul nu se modifică, sensul accelerației punctului P este acelaşi cu sensul vitezei sale (fig. 2.b)

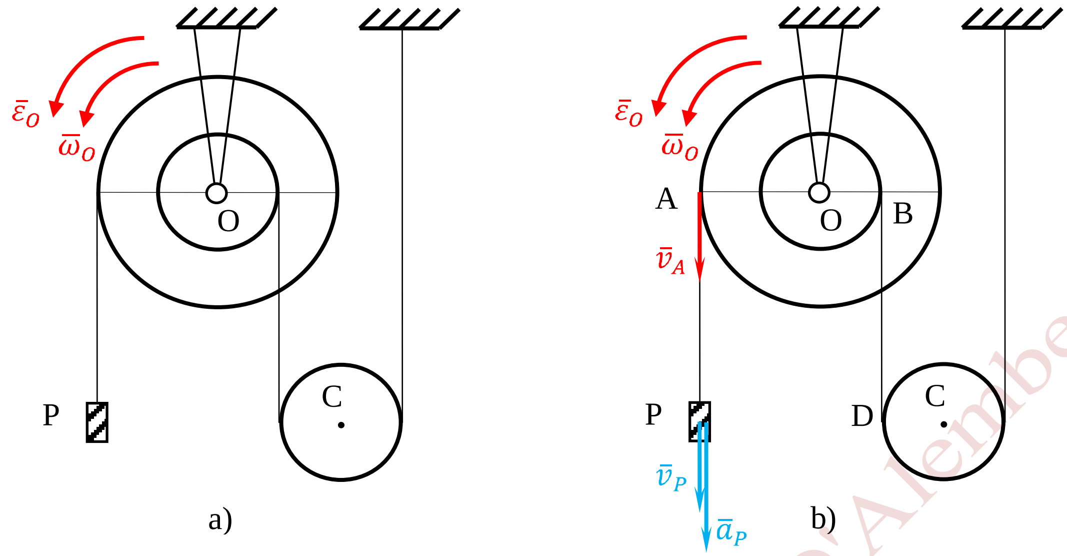


Fig. 2

Scripetele mobil efectuează o mişcare plan paralelă. Centrul instantaneu de rotaţie I este reprezentat în fig. 3 (scripetele mobil se rostogoleşte fără să alunece pe acel fir).

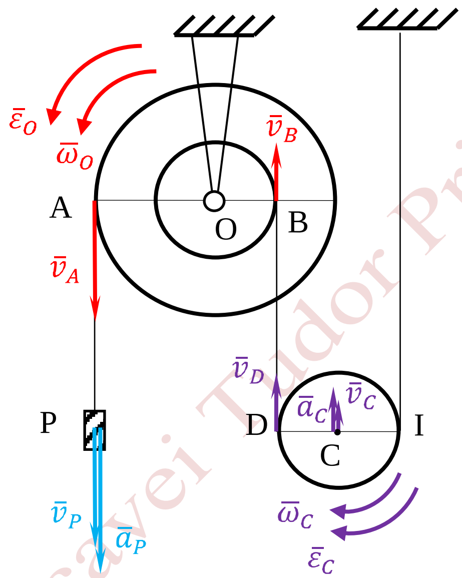


Fig. 3

Viteza punctului D este egală cu viteza punctului B (puncte aflate pe acelaşi fir). Viteza punctului B este:

$$v_B = OB \cdot \omega_O = R\dot{\theta}$$

Rezultă: $$v_D = R\dot{\theta}$$

În mişcarea plan paralelă distribuţia de viteze la un moment dat se realizează ca şi când la acel moment de timp corpul de roteşte în jurul centrului instantaneu de rotaţie. Se poate scrie:

$$v_D = ID \cdot \omega_C$$

Rezultă viteza unghiulară a discului cu centrul în C:

$$\omega_C = \frac{v_D}{ID} = \frac{R\dot{\theta}}{2R} = \frac{1}{2}\dot{\theta}$$

Accelerația unghiulară a acestui disc este:

$$\varepsilon_C = \dot{\omega}_C = \frac{1}{2}\ddot{\theta}$$

Viteza centrului de masă C este:

$$v_C = IC \cdot \omega_C = R \cdot \frac{1}{2}\dot{\theta} = \frac{1}{2}R\dot{\theta}$$

Deoarece punctul C are o mişcare rectilinie (verticală):

$$a_c = \dot{\omega}_C = \frac{1}{2}R\ddot{\theta}$$

În fig. 3 sunt reprezentate viteza unghiulară şi accelerația unghiulară ale scripetelui mobil precum şi viteza şi accelerația centrului de masă al acestuia.

3. Determinarea elementelor torsorului de inerție

Pentru un punct material forța de inerție are expresia:

$$\bar{F}_{in} = -m \cdot \bar{a}$$

unde m este masa punctului iar $\bar{a}$ este accelerația punctului; semnul minus pune în evidență faptul că forța de inerție are sens opus accelerației punctului.

Pentru un solid rigid, în problema plană, expresia torsorului de inerție în raport cu centrul de masă C este:

$$\tau_C(\bar{F}_{in}) = \begin{cases} \bar{F}_{in} = -m \cdot \bar{a}_C \\ \bar{C}_{in_C} = -J_C \cdot \bar{\varepsilon} \end{cases}$$

unde $\bar{F}_{in}$ este forța de inerție a solidului rigid, m este masa solidului rigid, $\bar{a}_C$ este accelerația centrului de masă al solidului rigid, $\bar{C}_{in_C}$ este cuplul de inerție al solidului în raport cu centrul său de masă, J_C este momentul de inerție mecanic al solidului în raport cu centrul său de masă iar $\bar{\varepsilon}$ este accelerația unghiulară a solidului; semnul minus pune în evidență faptul că forța de inerție are sens opus accelerației centrului de masă al solidului iar cuplul de inerție are sens opus accelerației unghiulare a solidului.

Pentru punctul material P se va determina mărimea forței de inerție:

$$F_{in_P} = M \cdot a_P = M \cdot 2R\ddot{\theta} = 2MR\ddot{\theta}$$

Pentru scripetele fix se vor determina mărimile elementelor torsorului de inerție în raport cu punctul O. Forța de inerție este:

$$F_{in_O} = 8M \cdot a_O = 8M \cdot 0 = 0$$

Pentru determinarea mărimii cuplului de inerție în raport cu punctul O trebuie determinat momentul de inerție al scripetelui fix în raport cu punctul O.

Observații:

- momentul de inerție al unui disc de masă M şi rază R în raport cu centrul său (notat cu A) are expresia: $J_A = \frac{1}{2}M \cdot R^2$;
- deoarece scripetele fix este alcătuit din două discuri suprapuse, momentul său de inerție va fi suma momentelor de inerție ale celor două discuri.

Momentul de inerție al scripetelui fix în raport cu punctul O este:

$$J_O = \frac{1}{2} \cdot 2M \cdot R^2 + \frac{1}{2} \cdot 6M \cdot (2R)^2 = 13MR^2$$

Cuplul de inerție al scripetelui fix în raport cu punctul O este:

$$C_{in_O} = J_O \cdot \varepsilon_O = 13MR^2\ddot{\theta}$$

Pentru scripetele mobil se vor determina mărimile elementelor torsorului de inerție în raport cu punctul C. Forța de inerție este:

$$F_{in_C} = 3M \cdot a_C = 3M \cdot \frac{1}{2}R\ddot{\theta} = \frac{3}{2}MR\ddot{\theta}$$

Momentul de inerție al scripetelui mobil în raport cu centrul său de masă este:

$$J_C = \frac{1}{2} \cdot 3M \cdot R^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

Cuplul de inerție al scripetelui mobil în raport cu centrul său de masă C este:

$$C_{in_C} = J_C \cdot \varepsilon_C = \frac{3}{2} M R^2 \cdot \frac{1}{2} \ddot{\theta} = \frac{3}{4} M R^2 \ddot{\theta}$$

4. Schema forțelor

Se izolează corpurile şi punctele materiale din sistem şi se încarcă fiecare cu forţele active (reprezentate cu culoare albastră), cu forţele de legătură din legăturile suprimate (verde) şi cu torsorul forţelor de inerţie în centrul de masă (roşu). Schema forţelor este reprezentată în figura 4.

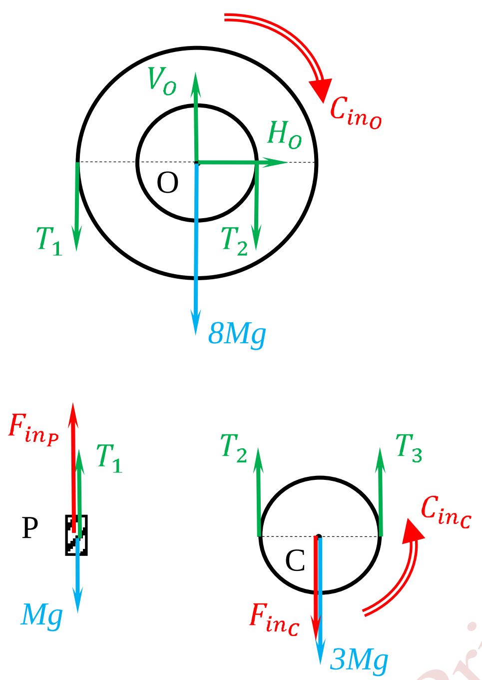


Fig. 4

5. Scrierea ecuațiilor de echilibru dinamic

Se vor scrie trei ecuații de echilibru dinamic independente pentru fiecare corp şi două ecuații de echilibru independente pentru fiecare punct material.

Observație: Ecuațiile de momente se vor scrie fie în raport cu centrul de masă al corpului respectiv, fie în raport cu puncte fixe.

Pentru punctul material P:

$$\sum X_i = 0: \quad 0 = 0$$

$$\sum Y_i = 0: \quad T_1 + F_{in_P} - Mg = 0 \qquad (1)$$

Pentru scripetele fix:

$$\sum X_i = 0: \quad H_O = 0 \qquad (2)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad V_O - T_1 - T_2 - 8Mg = 0 \qquad (3)$$

$$\sum M_O = 0: \quad C_{in_O} - T_1 \cdot 2R + T_2 \cdot R = 0 \quad (4)$$

Pentru scripetele mobil:

$$\sum X_i = 0: \quad 0 = 0$$

$$\sum Y_i = 0: \quad T_2 + T_3 - 3Mg - F_{in_C} = 0 \qquad (5)$$

$$\sum M_C = 0: \quad C_{in_C} - T_2 \cdot R + T_3 \cdot R = 0 \qquad (6)$$

6. Rezolvarea sistemului ecuațiilor de echilibru dinamic

Ecuațiile de echilibru dinamic sunt ecuații diferențiale de ordinul al doilea. Necunoscutele sunt atât reacțiunile dinamice (aici V_O, H_O, T_1, T_2 şi T_3) cât şi parametrii cinematici ce definesc mişcarea (aici $\ddot{\theta}$). Se vor exprima reacțiunile dinamice în funcție de parametrii cinematici (se alcătuieşte astfel subsistemul ecuațiilor diferențiale pentru determinarea reacțiunilor dinamice). Reacțiunile dinamice se vor înlocui în ultimele ecuații rămase rezultând ecuațiile diferențiale ale mişcării (acestea conțin doar parametrii cinematici). Se rezolvă subsistemul ecuațiilor diferențiale ale mişcării iar cu rezultatele obținute se rezolvă reacțiunile dinamice căutate şi se studiază mişcarea sistemului mecanic.

Din (2): $H_O = 0$

Din (1): $T_1 = -F_{in_P} + Mg \ \Rightarrow \ T_1 = Mg - 2MR\ddot{\theta}$

Din (4): $T_2 \cdot R = T_1 \cdot 2R - C_{in_O} \ \Longrightarrow \ T_2 \cdot R = 2R \cdot \left(Mg - 2MR\ddot{\theta}\right) - 13MR^2\ddot{\theta}$

$$T_2 = 2Mg - 17MR\ddot{\theta}$$

Din (3): $V_O = T_1 + T_2 + 8Mg \ \Rightarrow \ V_O = Mg - 2MR\ddot{\theta} + 2Mg - 17MR\ddot{\theta} + 8Mg$

$$V_O = 11Mg - 19MR\ddot{\theta}$$

Din (6): $T_3 \cdot R = T_2 \cdot R - C_{in_C} \quad \Rightarrow \quad T_3 \cdot R = R \cdot (2Mg - 17MR\ddot{\theta}) - \frac{3}{4}MR^2\ddot{\theta}$

$$T_3 = 2Mg - \frac{71}{4}MR\ddot{\theta}$$

Înlocuind în ecuația (5) se obține ecuația diferențială a mişcării:

$$2Mg - 17MR\ddot{\theta} + 2Mg - \frac{71}{4}MR\ddot{\theta} - 3Mg - \frac{3}{2}MR\ddot{\theta} = 0$$

$$Mg - \frac{145}{4}MR\ddot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{145}{4}MR\ddot{\theta} = Mg$$

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} = \frac{4}{145}\frac{g}{R}}$$

Deoarece semnul lui $\ddot{\theta}$ este plus, sensul mişcării sistemului de corpuri ales inițial este cel real.

Accelerația punctului P este:

$$\boldsymbol{a_P} = 2R\ddot{\theta} = \boldsymbol{\frac{8}{145}g}$$

Tensiunile din fire sunt:

$$\boldsymbol{T_1} = Mg - 2MR\ddot{\theta} = \boldsymbol{\frac{137}{145}Mg}$$

$$\boldsymbol{T_2} = 2Mg - 17MR\ddot{\theta} = \boldsymbol{\frac{222}{145}Mg}$$

$$\boldsymbol{T_3} = 2Mg - \frac{71}{4}MR\ddot{\theta} = \boldsymbol{\frac{219}{145}Mg}$$